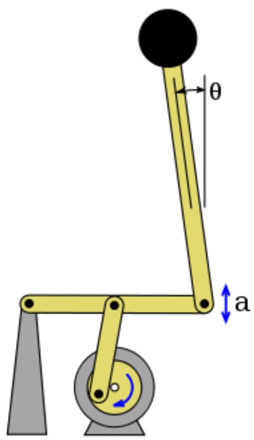
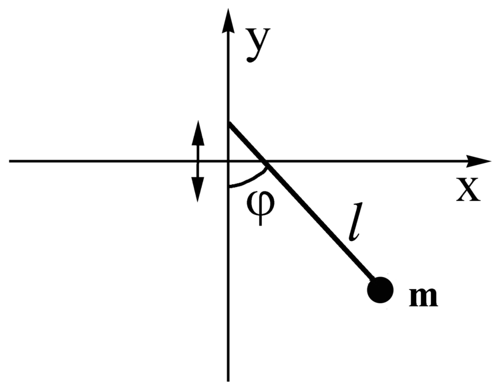
Un drôle d'oscillateur

Dans cet exercice, nous étudions un pendule mathématique, dont le point pivot oscille de façon rapide dans la direction verticale. Ce système peut par exemple être réalisé par le dispositif illustré par la figure ci-dessous, à gauche. A droite, on trouve une représentation schématique du système.





On note

- ν la fréquence de l'oscillation verticale de la suspension
- a l'amplitude des oscillations de la suspension
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
- g l'accélération de la pesanteur
- l la longueur du pendule
- m sa masse
- ϕ l'angle entre le pendule et la direction verticale, pointant vers le bas
- Le mouvement a lieu dans un plan, et on notera x la coordonnée horizontale et y la coordonnée verticale de la masse.

1. Montrer que y est donné par $y = -lcos\phi - acos\nu t$. Que vaut x?

2. Calculer l'énergie potentielle V.

3. Calculer l'énergie cinétique T.

4. Donner des bornes supérieures et inférieures (E_{pot}^{max}, E_{pot}^{min}) pour l'énergie potentielle.

5. L'énergie cinétique, est-elle bornée aussi?

6. Discuter l'existence (ou la non-existence) de quantités conservées au cours du temps dans ce système.

7. Nous rappelons le fait suivant de la mécanique Lagrangienne: Le Lagrangien est donné par

$$L(\phi, \dot{\phi}) = T - V \tag{1}$$

L'équation différentielle suivante est alors équivalente à l'équation du mouvement du problème:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} \tag{2}$$

Montrer que le Lagrangien du présent problème est de la forme

$$L = \frac{m}{2} l\dot{\phi}^2 + ml(g + a\nu^2 cos(\nu t))cos\phi + \frac{d}{dt}g(t) \tag{3}$$

avec une fonction $g(t)$ que l'on calculera.

8. Montrer que la fonction g n'affecte pas l'équation du mouvement du présent probléme.

9. Quelle est l'équation du mouvement de la masse.

10. Interpréter vos résultats dans la limite $a = 0$.

11. Toujours dans cette limite, décrire la trajectoire du pendule si au temps $t = 0$ son énergie est $E > mgl$.

12. Nous étudions maintenant le cas $a << l$, $\nu >> \omega_0$. Nous nous proposons d'élaborer une solution perturbative pour $\frac{a}{l}, \frac{\omega_0}{\nu} << 1$, à $\frac{a}{l}\frac{\nu}{\omega_0}$ fixé. Définissons:

$$\delta = \frac{a}{l} sin\phi_0 cos(\nu t) \tag{4}$$

Nous recherchons la variable ϕ sous la forme d'une superposition d'une oscillation lente et d'une oscillation rapide: $\phi = \phi_0 + \delta$. Déterminer l'équation du mouvement pour ϕ_0 jusqu'au premier ordre en δ.

13. Calculer la moyenne temporelle de $\ddot{\phi_0}$ sur une période du mouvement rapide.

14. Montrer que le mouvement lent moyenné en temps est donné par

$$ml^2\ddot{\phi_0} = -\frac{\partial}{\partial \phi_0} F(\phi_0) \tag{5}$$

avec une fonction $F(\phi_0)$ qu'on calculera.
Aide: Si vous n'arrivez pas à trouver la fonction F, vous pouvez utiliser l'expression suivante dans les questions 15-18.

$$F(\phi_0) = const\left[-cos\phi_0 + \frac{a^2\nu^2}{4gl} sin\phi_0\right] \tag{6}$$

Vous pouvez considérer que la constante est positive.

15. Quelle est la dimension de F? Donnez une interprétation physique de F.

16. Calculer la/les position(s) d'équilibre de la masse.

17. Discuter de la stabilité de ces positions en fonction des paramètres du problème.

18. Interpréter vos résultats.