CONCOURS ENS BCPST : PARIS LYON CACHAN
ÉPREUVE ÉCRITE de MATHÉMATIQUES 2007

Durée : 4 heures
Coefficients/Total général : Paris 16/145 ; Lyon 4/58.5 ; Cachan 4/65

MEMBRES du JURY : Arnaud BASSON, Amaury LAMBERT

L'épreuve 2007 consistait à traiter un problème classique de génétique des populations, à savoir la dynamique de m allèles en présence dans une population diploïde, panmictique et de taille infinie. Le modèle considéré était donc déterministe. On se donnait des réels positifs a_{ij}, qui sont les taux de reproduction de tout individu porteur du génotype formé de l'allèle i et de l'allèle j.

Il s'agissait notamment de savoir à quelle condition un équilibre non dégénéré (tous les allèles survivent) est unique, de montrer que la capacité globale de reproduction de la population augmente avec les générations, qu'un équilibre non dégénéré est stable si et seulement si la matrice symétrique A des taux de reproduction possède une et une seule valeur propre positive devant être simple, et plus généralement qu'en tout équilibre, les allèles ayant disparu sont en nombre au moins égal à $r-1$, où r est la somme des multiplicités des valeurs propres positives de A.

Deux candidats (dont un absent) ont obtenu la note 0, et un seul la note 20. La moyenne est de 7,83 et l'écart-type de 4,43. 51% des copies obtiennent une note inférieure à 7, 28% ont la moyenne, 9% ont 15 ou plus.

Le sujet faisait appel principalement aux compétences des candidats en algèbre linéaire. Malheureusement il apparaît après lecture des copies qu'il ne s'agit pas du domaine de prédilection de la majorité d'entre eux (même si le sujet était d'un niveau assez élevé dans l'ensemble), et beaucoup de copies donnent l'impression d'être plutôt mal à l'aise avec la manipulation de matrices, de vecteurs, de transposées... Certains candidats présentent des lacunes inquiétantes, et tendent à mélanger les matrices et les vecteurs, ou à écrire des produits matriciels qui n'ont pas de sens (XA au lieu de AX par exemple, A étant une matrice carrée et X un vecteur colonne). Au contraire, ceux qui dominent bien le calcul matriciel abordent le problème dans de bonnes conditions et disposent des moyens de se distinguer.

Nous avons constaté que les méthodes de calcul algorithmiques usuelles (détermination du noyau d'une matrice, de la dimension d'un espace propre en résolvant un système linéaire) sont bien maîtrisées par les candidats. Par contre, les calculs matriciels qui sortent des sentiers battus et demandent un peu d'initiative (II.3.b et IV.5.c) ont dérouté le plus grand nombre.

La manipulation des indices de sommation (troisième partie) est très mal maîtrisée par un très grand nombre de candidats. On remarque aussi que les symboles logiques (l'équivalence (4) dans la deuxième partie, ou les assertions quantifiées de la question IV.2) posent des problèmes, surtout les quantificateurs, qu'un certain nombre de candidats traite en dépit de toute logique.

Première partie. La première question du problème était fort simple, elle n'a pas posé de problème majeur aux candidats, si ce n'est quelques confusions faites par les plus faibles entre scalaires et matrices. La seconde question était astucieuse (il fallait penser à calculer ${}^tPAQ$), aucune copie ne l'a résolue correctement. Remarquons au passage que certains candidats ne craignent apparemment pas d'indisposer l'examinateur dès la deuxième question du problème en écrivant des démonstrations grossièrement fausses pour arriver au résultat coûte que coûte !

Deuxième partie. La question II.1.a été bien traitée dans l'ensemble, sauf par ceux qui se trompent de sens dans l'équivalence (P est le seul équilibre non dégénéré) $\Leftarrow$ ($H \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$).

À la question II.2.a, très peu de candidats parviennent à montrer rigoureusement que les composantes de $Q^{(\varepsilon)}$ sont bien dans $]0,1[$: la manipulation du minimum $\min_{i:v_i\neq 0} \frac{P_i}{|v_i|}$ a donné lieu à beaucoup de fantaisies (il n'est pas rare de lire dans les copies que $\min \frac{P_i}{|v_i|} = \frac{\min P_i}{\max |v_i|}$ par exemple) ; peu de candidats pensent à utiliser la valeur absolue pour écrire des majorations et se fourvoient dans des distinctions de signe peu utiles. En II.2.b, les candidats comprennent bien le raisonnement attendu d'eux, mais la grande majorité omet de vérifier que $Q^{(\varepsilon)}$ est effectivement un équilibre.

Le calcul du noyau de la matrice A proposée à la question II.3. a été très bien traité (question la mieux réussie du problème). Au contraire, la détermination d'équilibres non dégénérés a posé de grandes difficultés aux candidats, et il semble que beaucoup ont perdu un temps précieux à cette question. Il fallait faire preuve de clairvoyance afin de déterminer ce qu'il était nécessaire de calculer. Ceux qui sont parvenus à un résultat juste ont proposé des exemples variés d'équilibres ; d'autres au contraire obtiennent des valeurs aberrantes (l'équilibre proposé contient des valeurs négatives, ou bien la somme des composantes dépasse 1) mais ne s'en rendent pas souvent compte malheureusement.

Troisième partie. Il s'agit d'une partie technique portant sur la manipulation de sommes multiples et d'inégalités. La première question a été bien réussie, la seconde encore mieux ; certaines copies ont proposé des méthodes originales afin de prouver l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres — néanmoins la méthode élémentaire utilisant une identité remarquable restait nettement la plus rapide.

À partir de la question III.2.b, il fallait commencer à faire preuve de rigueur pour manipuler les sommes et les indices de sommation. Les candidats sont extrêmement peu à l'aise sur ce point, et nous avons vu des manipulations parmi les plus fantaisistes, des indices qui changent de façon intempestive d'une ligne à l'autre, plusieurs sommes indexées par le même indice, des carrés qui rentrent et qui sortent des sommes au gré des besoins du candidat, etc. Les questions III.2.b, 3 et 4.a ont donc été fort peu réussies, surtout lorsqu'elle demandaient un peu de finesse (voir que deux des indices jouaient le même rôle en 2.b, utiliser la symétrie de la matrice A en 4.a).

Enfin à la question III.4.b, qui conduisait à l'inégalité $V' \geq V$ (la viabilité est croissante), trop de candidats, obtenant une inégalité incorrecte (du type $V' \geq 0$), n'hésitent pas à en déduire sans vergogne la conclusion attendue – la croissance de V – comme si V' était la dérivée de V...

Quatrième partie. Les deux dernières parties du problème étaient sensiblement plus difficiles (à part quelques questions, sur lesquelles les candidats se sont souvent concentrés), et ont été beaucoup moins traitées.

À la question IV.1.a, on s'est contenté d'accorder les points à ceux qui ont mentionné que la matrice A est diagonalisable car symétrique. Toutefois la détermination des éléments de la matrice diagonale D a donné lieu à des réponses curieuses dans quelques copies (ce sont les coefficients de A divisés par les carrés des valeurs propres (sic) selon l'un des candidats !) On demandait ensuite en IV.1.b de montrer que A possède une valeur propre positive : les très rares copies qui y sont parvenues ont soit suivi l'indication fournie, soit utilisé judicieusement la trace de la matrice.

Les questions IV.2.a, 2.b, 2.c et 4.a n'ont quasiment pas été traitées, et les questions IV.3, 4.b et 4.c pas du tout.

La question IV.5. était plus facilement abordable. Ceux qui ont étudié les valeurs propres de la matrice A proposée s'en sont bien tirés dans l'ensemble ; ils ont généralement bien vu comment déterminer les multiplicités demandées, quoiqu'ils n'aient pas toujours su rédiger leur raisonnement de façon rigoureuse. La question IV.5.b n'a pas posé de souci particulier hormis des fautes d'étourderie ; en revanche en 5.c, une seule copie a pu déterminer l'équilibre non dégénéré de A.

Cinquième partie. Les questions de cette partie, difficile et très peu abordée, ont été notées de façon très large ; on a cherché à récompenser ceux qui ont eu quelques idées justes, sans attendre des réponses complètes que les candidats n'ont su fournir que très rarement.

Ainsi dès la première question, il fallait une certaine dextérité dans la manipulation des matrices pour prouver le résultat demandé. La question V.2, bien plus facile, a été mieux réussie. En V.3.a, on a accordé la moitié des points aux quelques candidats qui ont pu écrire l'expression de l'application linéaire demandée sans savoir donner les justifications (seule la meilleure copie y est parvenue). On a fait de même en V.3.b. À la question V.4, notée généreusement aussi, trois candidats ont marqué quelques points.

La question V.5.a, évidente, avait pour but de voir ceux qui suivaient encore, mais précisons surtout que ceux qui ont tenté de grappiller quelques points à cet endroit n'ont pas été récompensés. La question V.5.b a été réussie par quelques copies, quoique certains omettent de faire un dessin alors qu'on demandait une preuve graphique ! La question V.5.c n'a pas été résolue.

La question V.6 est traitée dans quelques copies, avec un succès mitigé. Enfin, la dernière question du problème a été résolue par un seul candidat, qui a eu une stratégie originale : se concentrer sur la troisième et surtout sur la cinquième partie du problème qu'il a traitée de façon satisfaisante, obtenant ainsi l'une des toutes meilleures notes.

En mettant à part la partie I du sujet, très courte, il était indispensable, pour obtenir une bonne note, de traiter en profondeur les parties II et III, et pour atteindre ou dépasser 15/20, il fallait en outre aborder sérieusement l'une des deux dernières parties. Les meilleures copies ont effectivement traité trois, voire les quatre parties du sujet.

En conclusion, il nous semble que les candidats connaissent plutôt bien leur cours d'algèbre linéaire, mais qu'ils manquent assez cruellement d'aisance lorsqu'il s'agit de le mettre en œuvre, et se trouvent de ce fait peu à même de faire face aux questions qui requièrent un minimum de subtilité. Les candidats ont tout intérêt à s'exercer sur ce type de sujets de nature algébrique (même s'ils les jugent quelque peu « arides ») : outre l'indispensable familiarisation avec les objets de l'algèbre linéaire comme les matrices qu'ils en retireront, la quasi absence de calculs les conduira à se concentrer sur la mise en place et la rédaction des raisonnements mathématiques. Il s'agit là d'un excellent exercice pour développer sa réflexion mathématique.

Enfin, ce n'est pas de prêcher dans le désert (financier ?) qui nous découragera de redire que les mathématiques nécessitent plus de considération qu'il ne leur en est donné actuellement au concours BCPST.