Rapport sur l'épreuve d'écrit MPI-Math2

L'objet principal de la composition de Mathématiques 2 était l'étude des séries de fonctions, dites de Weierstrass, de la forme

$$\sum_{n\geq 0} b^{-an}\cos(2\pi b^n x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,,$$

où $a \in]0,1]$ et $b>1$ sont fixés. Ces fonctions sont les exemples-types de fonctions continues nulle part dérivables. Le sujet adoptait un point de vue moderne, menant à une preuve de la non-dérivabilité pour tout choix de a et b, par des méthodes dites d'ondelettes. Les première et dernière parties sont issues de travaux récents sur les propriétés de régularité de fonctions plus générales, où l'on remplace le cosinus par une fonction lipschitzienne de période 1, et utilisent des méthodes plus élémentaires.

Il s'agissait d'un sujet d'analyse relativement classique, et chaque partie contenait quelques questions faciles, de sorte que peu de candidats sont restés bloqués à une étape ou une autre. Ainsi, toutes les questions ont été abordées par au moins un candidat, à l'exception de la dernière. Cependant, la seule résolution des question faciles ne suffisait pas pour se démarquer, et il était donc nécessaire de traiter quelques-unes des questions plus ardues (I.4.b, I.5.b, II.1.b, II.2, II.5, III.1.b, III.3, IV.3, V.3). Résoudre sans faute les deux premières parties assurait une bonne note, et en général, une bonne ou très bonne copie abordait avec quelque profondeur les quatre premières parties. Certains se sont lancés assez vite dans la partie V, ce qui pouvait s'avérer payant, cette partie étant indépendante en esprit des précédentes. Les tout meilleurs candidats ont résolu la quasi-totalité des questions.

Dans l'ensemble, le jury a été assez satisfait par la qualité des copies. Du point de vue de la maîtrise des connaissances, la rédaction de certaines questions, essentiellement les plus faciles, a cependant permis au jury de constater quelques lacunes et erreurs récurrentes dont les plus courantes sont :
- une utilisation abusive des notations o, O,
- penser qu'une fonction de limite nulle à l'infini est décroissante à l'infini (ce qui avait d'autant moins de sens que les fonctions considérées étaient à valeurs complexes),
- l'application du théorème de Dirichlet à des fonctions n'en vérifiant pas les hypothèses,
- penser que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence simple,
- l'utilisation mal justifiée d'interversions entre limite et somme,
- la confusion entre les notions d'intégrale d'une fonction intégrable sur un intervalle non-borné et d'intégrale impropre,
- l'absence de justification dans la question sur le prolongement $\mathcal{C}^1$ des fonctions,
- penser que le produit de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ est intégrable.

Sur la forme, on a pu noter que nombre de candidats concluent certaines questions alors que le raisonnement n'en est visiblement pas terminé, ce qui tend à faire mauvaise impression, le correcteur ne sachant pas s'il est en face d'une véritable incompréhension de la part du candidat, ou d'un « coup de poker ». Ceci va souvent de pair avec le travers consistant à penser que chaque question peut se résoudre par l'invocation d'un théorème « miracle » alors que certaines questions nécessitaient une rédaction un peu détaillée (II.1.b, II.2, II.5). À l'inverse, des questions faciles ont pu faire l'objet d'une rédaction-fleuve, surtout au début du sujet. Enfin, on a pu constater l'utilisation abusive d'abbréviations parfois invraisemblables : CVU, CVN, TCSGP, ou encore des dénominations fantaisistes (« impropriété » d'une intégrale, théorème de « découpage en rondelles », et autres délicatesses).

Voici un commentaire du sujet, question par question.

Partie I.

1., **2.**, **3.a.** Ces questions très faciles n'ont pas vraiment posé de problème. La rédaction en a été parfois trop abondante : il était inutile de démontrer par récurrence qu'une fonction 1-périodique est k-périodique pour tout entier k ! Pour I.1, la notion de convergence normale est à peu près bien maîtrisée, l'erreur la plus commune étant de déduire le caractère borné de W de la convergence uniforme, ce qui est insuffisant.

3.b. Cette question a été le premier vrai obstacle pour les candidats. L'élégance des preuves en a été variable, certains adoptant un raisonnement par l'absurde de façon plus ou moins adroite (voire en en appelant au théorème du point fixe). Les plus perspicaces ont noté que le mot « continue » de l'énoncé était inutile et que « bornée » suffisait.

4.a. L'idée de couper la somme en deux au rang $N-1$ a été bien comprise.

4.b. était la première question ardue du sujet. Beaucoup de candidats ont avancé un argument incomplet, prenant N de telle sorte que seul un des termes de l'inégalité de 4.a fût majoré. Il fallait aussi comprendre que la quantité $|W(x)-W(y)|/|x-y|^a$ devait être majorée pour $|x-y|>1$ et non seulement $|x-y|\leq 1$.

5.a. a été relativement bien comprise dans l'ensemble, mais a permis de dévoiler certaines faiblesses de rédaction. L'énoncé demandait une véritable inégalité et non un comportement local, utiliser l'identité de Taylor-Young avec des « $o(h)$ » était donc une idée plutôt mauvaise *a priori*, même s'il était possible de conclure avec son aide. La meilleure idée était d'utiliser la formule avec reste intégral (dont on a pu voir passer quelques versions fantaisistes) ou une inégalité de Taylor. Un raisonnement par l'identité de Taylor-Lagrange (avec la dérivée seconde estimée en un point entre x et $x \pm h$) ne fonctionnait pas, à moins de raisonner sur les parties réelle et imaginaire, puisque les fonctions considérées étaient à valeurs complexes (ceux qui ont utilisé cet argument n'ont cependant pas été très durement sanctionnés).
On a aussi beaucoup croisé l'inégalité « $|h| \leq |h|^2$ pour h assez petit »...

5.b. Beaucoup ont cru pouvoir démontrer le caractère Lipschitz de W. Il est à noter que certains ont parfois mieux réussi cette question que la 4.b, peut-être parce qu'ils essayaient de calibrer N dès le début de sorte que $b^N|h| \leq 1$, l'énoncé de la question précédente se restreignant inutilement aux valeurs de $|h| \leq 1$.

Partie II.
1.a. n'a pas posé de problème.

1.b. était une des deux questions les plus difficiles du problème, et très peu de candidats l'ont résolue, voire en ont compris les difficultés. Nombre de candidats ont tenté des encadrements, comme si la fonction f était décroissante, ce qui constituait une double erreur comme mentionné plus haut. Beaucoup se sont contentés d'évoquer une somme de Riemann de pas h sur $\mathbb{R}_+$ et de se référer à « la définition de l'intégrale ». D'ailleurs, l'écriture des sommes de Riemann sur un segment a parfois pris des allures fantaisistes.
En fait, il n'était pas possible de faire l'économie d'une hypothèse sur le comportement de f à l'infini, et l'on pouvait ou bien séparer la somme et l'intégrale en deux parties pour se ramener à un segment, en contrôlant les valeurs de la somme pour les grandes valeurs de nh, ou bien utiliser un argument de convergence dominée.

1.c. a posé peu de problèmes, mais l'argument le plus naturel consistant à appliquer la question précédente à la fonction $x \mapsto f(-x)$ n'a pas été si fréquemment avancé, les candidats préférant en appeler à « la même méthode que la question précédente », même s'ils n'avaient pas abordé II.1.b.

2. a été un bon test, car elle nécessitait de prendre quelques petites initiatives de notation. On a pu voir nombre de manipulations hasardeuses de la notation o, parfois interverties avec des sup. Le mieux était encore d'introduire quelques constantes de contrôle sur la fonction f et d'écrire quelques inégalités explicites.

3. a été bien faite, l'interversion entre série et intégrale ayant été bien justifiée.

4.a. Pas de difficulté notable.

4.b. et **4.c.** Certains candidats ont pris quelque liberté par rapport au chemin indiqué par le sujet, ce qui a été apprécié pour peu que les arguments en soient rigoureux. Ainsi, certains ont préféré faire appel à l'injectivité de l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ pour les fonctions T-périodiques continues. Il était en tout cas nécessaire de bien préciser le cadre dans lequel on appliquait ce théorème (ou l'identité de Parseval). Pour 4.c, on ne pouvait omettre de rappeler que les fonctions intégrées étaient continues. Enfin, certains ont confondu convergence en moyenne quadratique et convergence simple.

5. Les remarques sont similaires à II.2. Ici, beaucoup ont utilisé la convergence uniforme de f_T démontrée en II.2 pour justifier une interversion limite et somme, alors que cette convergence uniforme avait été démontrée pour la variable x et non la variable T.

6. Ceux qui ont abordé cette question l'ont correctement traitée, quoique les candidats aient souvent appliqué la question 1.c sans en vérifier les hypothèses.

Partie III.

1.a. a été bien faite dans l'ensemble, le théorème de dérivation sous le signe intégrale ayant bien été assimilé.

1.b. a été peu traitée et encore moins réussie, l'idée-clef étant d'utiliser des intégrations par parties successives. Beaucoup ont cru pouvoir appliquer la convergence dominée après avoir effectué un changement de variable, sans succès, ou en ont appelé au lemme de Riemann-Lebesgue avec un énoncé souvent faux.

2. Ces questions ultra-classiques dans les sujets d'analyse ont posé des problèmes surprenants. Dans b., on a pu voir des résultats très fantaisistes dans la dérivation de $x \mapsto \exp(-1/x)$. La question c. a été très mal faite, le jury tient à rappeler qu'un raisonnement propre en appelle à un théorème du cours, dit du « prolongement de la dérivée », et dont un énoncé est que si une fonction est continue, dérivable sauf peut-être en un point et dont la dérivée admet la même limite à gauche et à droite de ce point, alors elle est dérivable également en ce point et sa dérivée y est égale à la limite commune. La question d. a été irrégulière, beaucoup de candidats ne prenant pas la peine de citer les théorèmes généraux sur les opérations entre fonctions $\mathcal{C}^\infty$, ou essayant des recollements de fonctions compliqués et inadéquats.

3. Les candidats, peu nombreux, qui ont abordé cette question, en ont compris l'idée générale, très peu en revanche ont vu comment montrer la nullité des intégrales de Ψ_b et $x \mapsto x\Psi_b(x)$.

Partie IV.

1. a été très mal rédigée dans l'ensemble, les candidats ne comprenant souvent pas que ce qui était demandé (le caractère continu de ε_x et surtout son caractère borné) nécessitait une justification.

2.a. Cette question très facile a été bien faite, hormis certains oublis de modules dans les majorations.

2.b. a été assez bien faite, au moins pour partie, par ceux qui l'ont abordée.

3.a. Cette question et son doublon **3.b.**, peut-être la plus ardue du sujet, demandait à la fois d'avoir assimilé les parties II, III et IV et une certaine indépendance. Elle a été abordée par très peu de candidats, et réussie seulement par une poignée d'entre eux. Certains ont cru que $(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\Psi_b(x)\cos(yx)\mathrm{d}x$ était la partie réelle de $\mathcal{F}\Psi_b(y)$, oubliant que la fonction Ψ_b n'était pas à valeurs réelles. Il fallait donc écrire $2\cos(yx)$ sous la forme $e^{\mathrm{i}yx} + e^{-\mathrm{i}yx}$ pour pouvoir conclure.

Partie V.

1. n'a pas posé de problème à ceux qui l'ont traitée.

2.a. Bien que facile, cette question n'a pas toujours été bien résolue par ceux qui l'ont abordée, oubliant souvent qu'il était demandé que h soit plus petit que 1.

Les questions suivantes ont été abordées de façon trop clairsemée pour en faire un commentaire pertinent.