Session 2007

Filière : 2ème concours

ENS de Lyon

Epreuve de Mathématiques

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 4 pages numérotées de 1 à 4

Le sujet est composé de 4 pages et comprend deux exercices qui sont indépendants.

Exercice 1 (Polynômes d'interpolation de Fejér-Hermite) Soit n un entier strictement positif, pour x appartenant à $[-1, 1]$, on note t_n la fonction définie par

$$t_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

1. Déterminer t_0, t_1 et t_2. Montrer que pour n un entier supérieur ou égal à deux, on peut exprimer t_n en fonction de t_{n-1} et t_{n-2}.

2. En déduire que t_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient de plus haut degré. Les t_n sont appelés polynômes de Tchebychev.

3. Déterminer les racines du polynôme t_n que l'on rangera par ordre croissant et que l'on notera $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Soient f une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et n un entier strictement positif. On note $N = 2n - 1$ et on cherche un polynôme p_N de degré inférieur ou égal à N tel que

$$p_N(x_i) = f(x_i), \quad p'_N(x_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

4. Montrer que si ce polynôme existe, il est unique. En déduire l'existence de ce polynôme appelé polynôme d'interpolation de Fejér-Hermite.

On note pour x appartenant à $[-1, 1]$,

$$\pi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

et pour i compris entre 1 et n,

$$\ell_i(x) = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j).$$

5. Pour i compris entre 1 et n, exprimer $\pi'_n(x_i)$ en fonction de $\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)$.

6. Montrer que pour x appartenant à $[-1, 1]$, si l'on note pour i compris entre 1 et n,

$$F_i(x) = \left\{ 1 - \frac{\pi''_n(x_i)}{\pi'_n(x_i)} (x - x_i) \right\} \ell_i(x)^2,$$

on a

$$p_N(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) F_i(x).$$

7. Montrer que pour i compris entre 1 et n et x appartenant à $[-1,1]$, on a les identités suivantes

$$\ell_i(x) = \frac{(-1)^{i-1}\sqrt{1-x_i^2}\, t_n(x)}{n(x-x_i)}$$

et

$$F_i(x) = (1 - x\,x_i)\left(\frac{t_n(x)}{n(x-x_i)}\right)^2.$$

8. Montrer que pour tout x appartenant à $[-1,1]$,

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(x_i)| F_i(x).$$

9. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour x et x' appartenant à $[-1,1]$ tels que $|x - x'| \leq \eta$ on a $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.

   (a) On note

   $$\|f\|_{[-1,1]} = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|.$$

   Montrer que pour tout x appartenant à $[-1,1]$,

   $$|f(x) - p_N(x)| \leq \varepsilon + \frac{4\|f\|_{[-1,1]}}{n\,\eta^2}.$$

   (b) En déduire que la suite des polynômes d'interpolation de Fejér-Hermite converge uniformément vers f.

10. Plus généralement, pour n un entier strictement positif, on note $(x_{1,n}, \cdots, x_{n,n})$ une suite de n réels distincts de $[-1,1]$. Montrer que la fonction f peut être approchée uniformément par une suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$p_n(x_{i,n}) = f(x_{i,n}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Indication : On pourra utiliser le théorème de Weierstrass et les polynômes précédents.

Exercice 2 (Inégalité de Kantorovitch)

1. Soient a_1 et a_2 deux nombres strictement positifs tels que $a_1 \leq a_2$. Montrer que pour tous x et y appartenant à $[a_1, a_2]$, on a
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}.$$

2. Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres strictement positifs, à chaque partie finie J de $\mathbb{N}$, on associe l'ensemble $\Sigma(J)$, défini par
$$\Sigma(J) = \{(x_j)_{j\in J} : x_j \geq 0, \sum_{j\in J} x_j \leq 1\}.$$
On définit une fonction sur $\Sigma(J)$, pour $x = (x_j)_{j\in J}$, par
$$f_J(x) = \left(\sum_{j\in J} \lambda_j x_j\right)\left(\sum_{j\in J} \frac{x_j}{\lambda_j}\right)$$
et on pose
$$\rho(J) = \max\{f_J(x) : x \in \Sigma(J)\}.$$
Déterminer $\rho(J)$ quand J possède exactement deux éléments.

3. On définit les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^J$:
$$\lambda(J) = (\lambda_j)_{j\in J}, \quad \mu(J) = \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)_{j\in J}$$
et $\omega(J)$ le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Vérifier que, dans le cas où J possède au moins trois éléments, les vecteurs $\lambda(J)$, $\mu(J)$, $\omega(J)$ sont linéairement indépendants.

4. On note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^J$. On suppose que f atteint son maximum en un point x situé à l'intérieur de $\Sigma(J)$, c'est-à-dire que x appartient à $\Sigma(J)$, a toutes ses composantes strictement positives, et
$$\sum_{j\in J} x_j < 1.$$
Montrer que pour tout vecteur z orthogonal à $\omega(J)$, on a
$$(\mu(J), x)(\lambda(J), z) + (\mu(J), z)(\lambda(J), x) = 0.$$
En déduire une contradiction avec l'indépendance linéaire de $\lambda(J)$, $\mu(J)$ et $\omega(J)$.

5. Soit $J = \{1, \ldots, n\}$, déterminer $\rho(J)$ et montrer que l'expression de $\rho(J)$ est encore valable si les λ_j ne sont pas tous distincts.

6. Soit A une matrice réelle, symétrique et définie positive de taille n et soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^n$, non nul, on a l'inégalité suivante

$$\frac{(x, Ax)(x, A^{-1}x)}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^2} \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$