U271

SESSION 2007

SECOND CONCOURS
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé.
Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail.
Aucun échange n'est permis entre les candidats.

L'énoncé comporte 9 pages

Tournez la page S.V.P.

Emission et détection d'une onde sonore

On s'intéresse dans ce problème à l'émission et à la détection d'une onde sonore. La première et la deuxième partie sont consacrées à l'étude d'une corde (piano ou clavecin), la troisième partie à celle d'un tuyau sonore pouvant modéliser une flûte. Enfin, on étudie dans la quatrième partie un modèle simple de microphone. Les parties du problème sont largement indépendantes. Il est conseillé toutefois de lire intégralement l'énoncé, des résultats fournis dans une partie pouvant être exploités dans une autre. La calculatrice est autorisée. Les quantités vectorielles sont notées en caractères gras.

On rappelle que la fréquence de référence des musiciens est émise par un diapason et correspond au La_3 (l'indice 3 désignant la troisième octave) de fréquence 440 Hz. Le passage à l'octave supérieure revient à multiplier par 2 la fréquence du son.

Si l'on considère un petit paramètre $\varepsilon \ll 1$, on donne le développement limité au premier ordre ε de la fonction $(1+\varepsilon)^{-1}$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \sim 1 - \varepsilon \tag{1}$$

On sera amené à considérer dans ce problème des fonctions de deux variables. On définit la dérivée partielle de la fonction $f(x,t)$ par rapport à la variable x comme la dérivée de f par rapport à x, la variable t étant prise constante. Cette fonction sera notée $\partial_x f$ et vérifie, au premier ordre en dx,

$$f(x+dx,t) - f(x,t) = (\partial_x f)dx \tag{2}$$

La dérivée partielle seconde de la fonction f sera notée $\partial_x^2 f$, cette fonction étant définie par l'égalité $\partial_x^2 f = \partial_x(\partial_x f)$

I. EQUATION DU MOUVEMENT D'UNE CORDE VIBRANTE

On considère une corde sans raideur de masse linéïque μ. On note $y(x,t)$ l'ordonnée de la corde au point x à l'instant t et $\alpha(x,t)$ l'angle algébrique formé par la tangente à la corde avec l'horizontale au point x à l'instant t (voir figure 1). La corde est fixée à ses extrémités notées O (qui correspond à l'origine du repère) et L de coordonnées $(\ell, 0)$. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. L'accélération de la pesanteur, notée $\mathbf{g}$, est parallèle à (Oy).

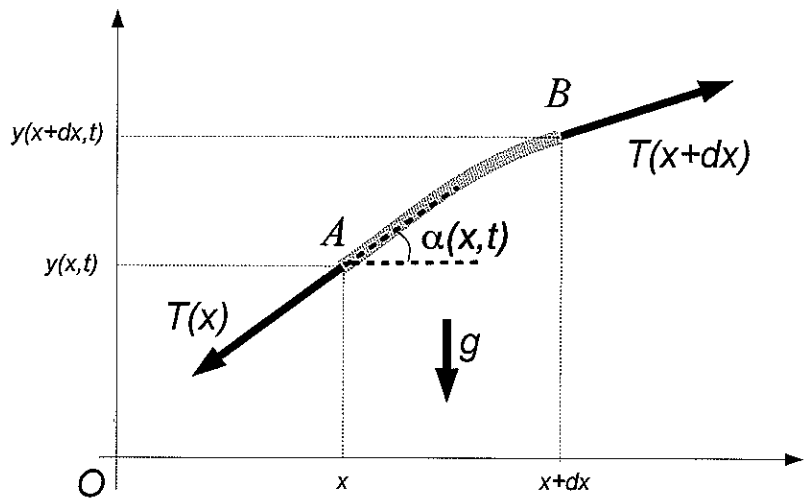

FIG. 1 – *Schéma d'un élément de corde situé entre les abscisses x et $x+dx$. La tension interne de la corde au point x à l'instant t est notée $\mathbf{T}(x)$ et s'exerce tangentiellement à l'élément de corde. On note $\alpha(x,t)$ l'angle algébrique formé par la tangente à la corde et l'horizontale au point x.*

1. Montrer que
$$\tan \alpha(x,t) = \partial_x y(x,t) \tag{3}$$

2. On considère un segment infinitésimal de corde compris entre les points A et B d'abscisses respectives x et $x + dx$ (voir figure 1). On note

$ds = AB$ la longueur du segment. Exprimer ds en fonction de dx et $\alpha(x, t)$.

3. Dans toute la suite, on étudiera des mouvements de faible amplitude tels que $\partial_x y \ll 1$. On a donc, à l'ordre 1 en α, $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha$. En déduire l'expression de ds. On conservera cet ordre d'approximation dans toute la suite du problème. Quelle est la masse du segment de corde AB ?
4. Outre son poids, la corde est soumise à sa tension interne $\mathbf{T}(x)$: le segment AB est soumis de la part du reste de la corde à une force $-\mathbf{T}(x)$ au point x et $\mathbf{T}(x + dx)$ au point $x + dx$. On admettra que la tension s'exerce tangentiellement au segment, et que la vitesse du centre d'inertie de l'élément de corde est assimilable à la vitesse du point A. Exprimer la deuxième loi de Newton (autrement appelée principe fondamental de la dynamique) sur ce système.
5. On étudie les mouvements *transversaux*, *ie* les mouvements dont la vitesse selon la direction x est nulle. En projetant le principe fondamental sur l'axe (Ox), montrer que la tension interne de la corde ne dépend pas de x. On notera T sa valeur.
6. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur l'axe (Oy) pour obtenir une équation liant les dérivées partielles des fonctions y et α. On négligera le poids de la corde devant sa tension interne.
7. Montrer qu'au repos, la corde est confondue avec l'axe (Ox).
8. Montrer que l'élongation $y(x, t)$ de la corde vérifie l'équation de d'Alembert
$$\partial_x^2 y - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 y = 0. \tag{4}$$
On exprimera c en fonction de T et μ.
9. Quelle est la dimension de T ? de μ ? En déduire la dimension du paramètre c, ainsi que sa signification physique.
10. *Application numérique.* Calculer c pour une corde d'acier de masse volumique $7,2\ 10^3$ kg.m^{-3}, de rayon 1 mm, tendue par une tension de 3000 N (corde de piano).

II. Modes propres d'une corde vibrante

On a établi dans la section précédente que l'élongation $y(x,t)$ d'une corde sans raideur de poids négligeable obéit à l'équation de d'Alembert (4), où c est la célérité de l'onde. On rappelle que la corde est fixée à ses extrémités O (origine du repère) et L de coordonnées $(\ell, 0)$. On cherche une solution sous la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$.

1. Justifier la forme de solution proposée. En particulier, on exprimera les conditions limite respectées par la corde vibrante.
2. On suppose f et g non nuls. Que vaut le rapport f''/f en fonction du rapport g''/g ? Montrer que le rapport f''/f ne peut être qu'une constante. On admettra que cette égalité est aussi réalisée dans le cas où $f = 0$ et $g = 0$.
3. En considérant les conditions limite que doit respecter f, montrer que cette constante ne peut être que positive. On la notera k^2 par la suite. Déduire l'expression générale de $f(x)$. Quelle est la signification physique de la grandeur k ?
4. Montrer que la grandeur k est quantifiée, *ie* s'écrit sous la forme $k_n = n\, k_1$ où n est un entier positif. On exprimera k_1 en fonction des paramètres du problème. Le mode de pulsation spatiale k_1 est appelé *mode fondamental* de la corde vibrante, les modes dont l'indice de vibration est supérieur les *modes harmoniques.* On notera f_n la fonction décrivant l'évolution selon x de la n^{ieme} harmonique.
5. On note $y_n(x,t) = f_n(x)g_n(t)$ la solution correspondant au n^{ieme} mode de vibration, et ω_n^2 le rapport g_n''/g_n. Exprimer ω_n en fonction des paramètres du problème. Donner l'expression générale de $g_n(t)$. Quelle est la signification physique de la grandeur ω_n ?
6. *Application numérique.* Quelle doit être la tension d'une corde de piano de longueur $\ell = 1$ m pour que la fréquence de vibration du mode fondamental soit celle du La$_3$? Commenter l'évolution du son si on raccourcit la corde. Qu'arrive-t-il si la corde se détend ?
7. On suppose qu'à l'instant initial la corde est au repos et on qu'on excite le n^{ieme} mode de vibration. Dessiner la forme de la corde après un quart, une moitié et trois quarts de période temporelle pour $n = 1, 2$ et 3. Justifier le terme d'onde stationnaire donnée à une telle solution.

8. On déduit des questions précédentes que la forme générale des solutions pour $y(x,t)$ s'écrit

$$y(x,t) = \sum_n y_n(x,t) = \sum_n \sin(k_n x)(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \qquad (5)$$

Montrer que les coefficients a_n et b_n sont entièrement déterminés par la donnée de $y(x,0)$ et de $\partial_t y(x,0)$. On donne $\int_0^\ell dx \sin(\frac{n\pi x}{\ell}) \sin(\frac{m\pi x}{\ell}) = \frac{\ell}{2}\delta_{m,n}$ où $\delta_{m,n} = 1$ si $m = n$ et 0 si $m \neq n$.

9. Montrer que les coefficients a_n sont nuls si la corde est confondue avec l'axe Ox à l'instant initial.

10. Montrer que les coefficients b_n sont nuls si la corde n'a pas de vitesse à l'instant initial.

11. On suppose qu'à l'instant initial la corde est confondue avec l'axe Ox et qu'on la frappe au point a avec un marteau de largeur e (corde de piano), *ie* on lui donne une vitesse non nulle, notée u, entre les points a et $a+e$, avec $e \ll \ell$. Donner l'expression des coefficients b_n.

12. On peut montrer que pour une corde de clavecin de mêmes caractéristiques initialement pincée, l'amplitude des coefficients décroît en $1/n^2$. Commenter la différence entre les sons obtenus. Quelle caractéristique du son est ici mise en évidence ?

III. Tuyau sonore

On considère dans cette section un fluide contenu dans un tuyau cylindrique d'axe (Ox) de section droite S. Au repos, la pression P_0 et la masse volumique du fluide ρ_0 dans la conduite sont uniformes. La propagation d'une onde sonore au sein du fluide se caractérise par l'existence d'une surpression $p(x,t) \ll P_0$, ainsi que par un mouvement $u(x,t)$ des particules du fluide : les particules qui se trouvaient au repos à l'abscisse x se trouvent au passage de l'onde à l'abscisse $x + u(x,t)$ (voir figure 2). On note $v(x,t)$ la vitesse des particules se trouvant au repos à l'abscisse x, définie par $v(x,t) = \partial_t u(x,t)$. On admet que les quantités $p(x,t)$, $u(x,t)$ et $v(x,t)$ vérifient l'équation de d'Alembert (4) où on note c la célérité de l'onde sonore.

1. Donner la valeur typique de la célérité c du son dans l'air à 20°C.

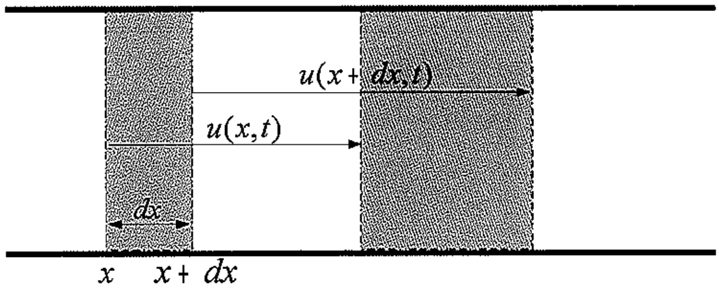

FIG. 2 – *Schéma d'une tranche de fluide située initialement entre les abscisses x et $x + dx$. Le fluide est contenu dans un tuyau de section droite S. Les particules qui étaient au repos en x se trouvent au passage de l'onde en $x + u(x,t)$.*

2. L'oreille humaine perçoit des fréquences allant de 20 Hz à 20 kHz. Définir et calculer la longueur d'onde dans l'air de ces fréquences extrêmes.
3. On suppose que le tuyau de longueur ℓ est ouvert à ses deux extrémités sur l'air libre. Montrer que ces points d'abscisse $x = 0$ et $x = \ell$ correspondent à des noeuds de surpression, *ie* $p(0,t) = p(\ell,t) = 0$ quel que soit t.
4. Par analogie avec la corde vibrante, montrer que le tuyau est le siège d'ondes stationnaires de surpression dont la fréquence est quantifiée et s'écrit $\omega_n = n\omega_1$ où ω_1 est la pulsation du mode fondamental. Donner l'expression de ω_1 en fonction des paramètres du problème.
5. *Application numérique.* Quelle doit être la longueur ℓ du tuyau ouvert pour que son mode fondamental à 20°C vibre à la fréquence du La_3 ?
6. La célérité du son dans l'air varie comme la racine carrée de la température absolue. A quelle variation de fréquence du mode fondamental du tuyau

doit-on s'attendre entre une utilisation en hiver, à Brest (on prendra $T = 0^\circ\mathrm{C}$) et l'été, à Nice (on prendra $T = 40^\circ\mathrm{C}$) ? On ne tiendra pas compte de la dilatation du tuyau.

7. Une flûte à bec peut être assimilée à un tuyau ouvert percé de trous. Que se passe-t-il au niveau d'un trou ouvert ?
8. On suppose que la flûte, tous trous fermés, émet un La_3. Quelle note obtient-on si un trou est ouvert à la moitié de sa longueur ?
9. On considère maintenant un tuyau ouvert en $x = 0$ et fermé en $x = \ell$. Montrer que l'abscisse $x = \ell$ correspond à un maximum de surpression. On appliquera la deuxième loi de Newton sur la tranche de fluide située initialement entre x et $x + dx$, et on montrera que la surpression et la vitesse vérifient l'équation
$$\rho_0 \partial_t v = -\partial_x p \tag{6}$$
10. Quelle relation existe-t-il entre la fréquence du mode fondamental d'un tuyau fermé et d'un tuyau ouvert ?

IV. Microphone électrostatique

On étudie dans cette partie comment transformer une onde acoustique en signal électrique observable à l'aide d'un oscilloscope. Le montage étudié est celui de la figure 3. Un générateur de tension continue E alimente un circuit composé d'un condensateur de capacité C, éventuellement variable dans le temps, et d'une résistance R. On note $U(t)$ la tension aux bornes de la capacité, q la charge de la capacité, $v(t)$ la tension aux bornes de la résistance, $i(t)$ le courant traversant le circuit. On prendra garde à la convention adoptée figure 3 pour le sens du courant et la polarité du condensateur représentée. On observe la tension aux bornes de la résistance à l'aide d'un montage amplificateur et d'un oscilloscope. On admettra que cette observation ne perturbe pas la dynamique du circuit. On donne la capacité C d'un condensateur plongé dans l'air de permittivité diélectrique assimilée à celle du vide ε_0, dont les plaques sont distantes de d et ont une surface S :
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \tag{7}$$

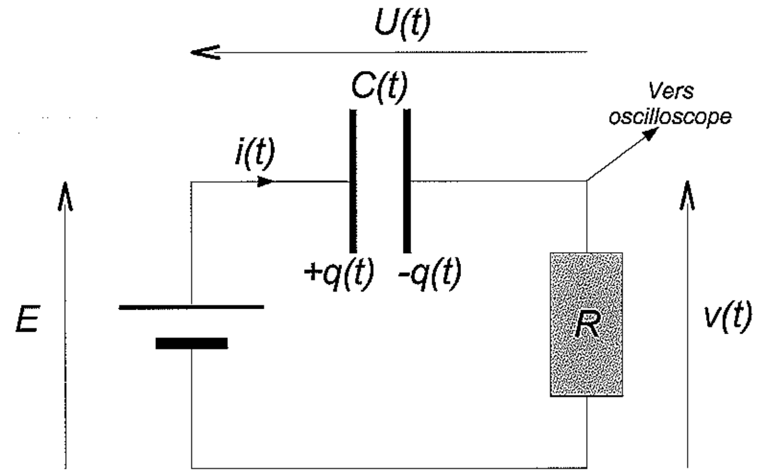

FIG. 3 – *Schéma du montage étudié.*

1. Rappeler l'équation liant la charge q du condensateur à sa tension U et à sa capacité C. On notera $(\mathcal{E}_1)$ l'équation obtenue.
2. Que vaut la tension E en fonction des tensions $U(t)$ et $v(t)$? On notera $(\mathcal{E}_2)$ l'équation obtenue.
3. Quel est le lien entre la tension $v(t)$ et la dérivée temporelle $\dot{q}(t)$ de la charge du condensateur ? On notera $(\mathcal{E}_3)$ l'équation obtenue.
4. On suppose dans les premières questions que la capacité C ne dépend pas du temps. En utilisant les équations $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$, trouver l'équation différentielle satisfaite par $v(t)$.
5. On introduit $\tau = RC$. Quelle est la dimension de la quantité τ ?
6. On étudie la réponse du circuit RC à un échelon de tension : à l'instant initial la tension aux bornes du condensateur est nulle, et on allume le générateur. En déduire la solution de l'équation différentielle. Tracer $v(t)$. Donner la signification physique du paramètre τ.
7. On considère à présent le cas d'une capacité variable dans le temps $C(t)$: on suppose qu'une plaque du condensateur est mobile, de sorte

qu'une surpression acoustique $p(t) \propto \sin(\omega t)$ modifie faiblement la distance entre les plaques $d(t) = d_0 - a\sin(\omega t)$, avec $\varepsilon = a/d_0 \ll 1$. Montrer que la capacité s'écrit, au premier ordre en ε, $C(t) = C_0 + C_1 \sin(\omega t)$, avec $\varepsilon = C_1/C_0$. Que devient la dérivée temporelle de l'équation $(\mathcal{E}_1)$?

8. Montrer que l'équation régissant l'évolution de $v(t)$ s'écrit maintenant

$$v(1 + R\dot{C}) + RC\dot{v} = R\dot{C}E \tag{8}$$

9. En tenant compte de l'expression de $C(t)$, transformer l'équation obtenue. On obtiendra une équation différentielle dont les coefficients dépendent de $\tau_0 = RC_0$, ω et ε.

10. Montrer que l'équation peut s'écrire, au premier ordre en ε

$$\dot{v} + v\left(\frac{1}{\tau_0} + \omega\varepsilon\cos(\omega t) - \frac{\varepsilon\sin(\omega t)}{\tau_0}\right) = \omega\varepsilon\cos(\omega t)E \tag{9}$$

11. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $v(t) = V\sin(\omega t + \phi)$. Justifier la forme choisie.

12. On trouve, au premier ordre en ε,

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= \frac{1 + \varepsilon\tau_0\omega}{\tau_0\omega + \varepsilon} \\ V &= \frac{\tau_0\varepsilon\omega E}{\sqrt{1 + \tau_0^2\omega^2}} \end{aligned} \tag{10}$$

Tracer ϕ et V en fonction de ω.

13. A quelle condition sur R l'amplitude V ne dépend-elle pas de la pulsation ω ? Quelle est alors l'expression de $v(t)$? Commenter physiquement cette condition.

14. On donne $C_0 \sim 1$ nF. On excite le microphone avec un diapason. Quelle doit être la valeur de R pour que le signal enregistré à l'oscilloscope corresponde, à un facteur de proportionnalité près, à l'amplitude de la surpression de l'onde acoustique ?