

---

## ÉPREUVE ÉCRITE de MATHÉMATIQUES 2008

ENS : PARIS - LYON - CACHAN

*Durée : 4 heures*

*Coefficients/Total général : Paris 16/145 ; Lyon 4/58,5 ; Cachan 4/65*

**MEMBRES du JURY : Nicolas CHAMPAGNAT, Stéphane GÉNIEYS ; Amaury LAMBERT**

---

L'épreuve 2008 consistait à analyser la distribution dite « de Luria et Delbrück », qui avait été étudiée par ces auteurs en 1943 afin de répondre à la question du mode d'émergence de la résistance de bactéries à un virus létal. Deux écoles s'affrontaient sur ce point depuis les années 20. La première pensait que les bactéries développent une résistance du fait de leurs interactions avec les virus environnants (hypothèse de « mutations dirigées »). La seconde pensait que la résistance apparaissait par des changements aléatoires indépendants de la présence du virus (hypothèse de « mutations aléatoires »). Luria et Delbrück ont analysé la variance empirique du nombre de cellules résistantes dans un échantillon composé de plusieurs cultures de bactéries séparées, mises en présence du virus au bout d'un temps fixe. Ils ont pu trancher en faveur de l'hypothèse de mutations aléatoires en comparant leurs résultats avec les prédictions théoriques correspondant à chaque hypothèse. Le modèle correspondant à la seconde hypothèse est celui étudié dans ce sujet.

Les notes vont de 0,93 à 20. La moyenne est de 9,23 et l'écart-type de 3,74. 23% des copies obtiennent une note inférieure à 6,5, 39% ont la moyenne, et 10% ont 14,5 ou plus.

La première partie portait sur un modèle déterministe simple de suites récurrentes. Les premières questions, utilisant des propriétés usuelles des suites, ont été traitées dans toutes les copies sauf les plus faibles. La dernière question, par contre, a été très discriminante : elle demandait de manipuler les équivalents asymptotique, ce qui pose apparemment problème à une majorité de candidats.

La seconde partie portait sur les fonctions génératrices des variables aléatoires réelles. Si la convergence et la convergence absolue des séries sont utilisées correctement dans un contexte simple (question 1), ces notions sont beaucoup plus maltraitées lorsque les candidats ne voient pas facilement la réponse correcte (question 2). On trouve alors de nombreuses affirmations fantaisistes comme « si une suite est bornée elle tend vers 0 », « si la suite tend vers 0, la série converge », « si une série est convergente, elle est absolument convergente », et d'autres encore. Ces affirmations montrent que ces notions sont beaucoup moins maîtrisées que l'on pourrait le croire en restant dans un contexte routinier, et que les candidats n'hésitent pas à affirmer n'importe quoi pour « obtenir » un résultat. Une proportion plus faible, mais néanmoins alarmante de candidats ne semble également pas connaître la différence entre les notions de suite convergente et de série convergente.

A noter aussi que l'immense majorité des candidats traitent une borne supérieure comme si c'était un maximum (même des copies par ailleurs bonnes ne semblent pas voir le problème), ce qui laisse penser que cette difficulté n'a pas été suffisamment soulignée en première année.

La plupart des candidats ne reprennent pied dans cette partie qu'à la question 4 b), lorsqu'on rentre dans un cadre probabiliste. Les premières propriétés des variables aléatoires discrètes sont

généralement correctement maîtrisées.

La troisième partie faisait le lien entre la loi de Luria-Delbrück et sa fonction génératrice. Elle comporte des questions classiques sur les variables aléatoires discrètes, généralement bien traitées, et des questions plus analytiques nécessitant d'utiliser les résultats de la partie précédente. Ces questions étaient souvent une simple application de résultats précédents, mais n'ont été traitées que par les candidats ayant eu suffisamment reculé sur l'ensemble du sujet. On ne saurait trop conseiller aux candidats de s'efforcer d'obtenir ce recul en parcourant attentivement le sujet avant de démarrer. On notera également qu'un nombre anormalement élevé de candidats ne savent pas ce que signifie la somme d'une expression pour un indice variant de 0 à 0, ce qui a conduit à de nombreuses réponses fausses à la question, pourtant simple, 3 b).

La quatrième partie était une étude générale du modèle de Luria-Delbrück. La aussi, les premières questions sur les variables aléatoires discrètes ont été généralement bien traitées. On conseillera toutefois de toujours revenir à l'interprétation, en termes de modélisation, de ce que l'on démontre : ici la question 1 consistait à donner la probabilité que le nombre de cellules mutantes soit supérieur au nombre total de cellules, qui est évidemment nulle, ce qui ne nécessitait aucun calcul. Les points décevants de cette partie concernent les suites réelles. Le fait qu'une suite croissante admette une limite finie ou infinie, puis plus loin qu'une suite décroissante et minorée soit convergente, ne sont pas intégrés par de trop nombreux candidats.

La cinquième partie était une étude plus détaillée du modèle de Luria-Delbrück. Elle n'a été traitée que par très peu de candidats, qui ont alors été largement récompensés. Certaines des questions traitées nécessitaient une compréhension en termes de modélisation de la loi des variables aléatoires étudiées, et d'autres nécessitaient une vision d'ensemble suffisante du sujet pour utiliser les résultats des parties précédentes.

De cette étude partie par partie, il ressort que si les probabilités discrètes sont souvent manipulées assez correctement, en revanche l'analyse a posé nettement plus de problèmes à un grand nombre de candidats, mettant en évidence des lacunes remontant parfois à la première année, sur les suites, les équivalents et les bornes supérieures.

Enfin, nous nous joignons à nos prédécesseurs pour regretter la trop faible part donnée aux mathématiques dans les concours des Écoles Normales Supérieures, notamment de Lyon et Cachan, face aux besoins mathématiques grandissants en biologie.

Luria, S.E., Delbrück, M. 1943. Mutations of bacteria from virus sensitivity to virus resistance. *Genetics* 28, 491-511.