ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHS-INFO

ENS : PARIS LYON CACHAN

4 heures *Coefficients :* **PARIS 4 LYON 4 CACHAN 5**

MEMBRES DE JURYS : V. Cortier, A. Darte et G. Schaeffer

Comme l'indiquait l'introduction au sujet, le but du problème était d'étudier quelques propriétés, combinatoires et algorithmiques, des *corps convexes*, selon le formalisme introduit par Minkowski dans sa *géométrie des nombres*. Quelques liens avec l'optimisation sur les convexes et les réductions de base étaient explorés.

La première partie permettait au candidat de se familiariser avec les polyèdres, intersections d'un nombre *fini* de demi-espaces affines, donc propices aux optimisations combinatoires, et notamment leur version linéaire, les cônes. On donnait une démonstration algorithmique du lemme de Farkas, de la représentation duale de ces ensembles, définis par générateurs ou comme intersection de demi-espaces, et du théorème de dualité, fondamental en programmation linéaire car fournissant une interprétation et une algorithmique duales.

La seconde partie étudiait plus en détails les ensembles de $\mathbb{R}^n$ utilisés par Minkowski, convexes, bornés, dont l'intérieur contient $\vec{0}$, et symétriques par rapport à $\vec{0}$. On montrait comment ces ensembles permettent de définir des normes (les fonctions de jauge) de façon similaire aux sphères et à la norme euclidienne auxquelles les candidats étaient sans doute plus habitués. Cette partie menait à la démonstration du premier théorème de Minkowski (par opposition au second, plus difficile à démontrer, et portant sur le produit des minima successifs) et à des applications donnant des encadrements pour les solutions de certains systèmes diophantiens. [1] Cette partie mélangeait des arguments d'intégration (pour le calcul des volumes), de topologie élémentaire (pour l'étude des intérieurs et adhérences de ces convexes), et de combinatoire (pour le théorème proprement dit).

La troisième partie explorait les réseaux de $\mathbb{Z}^n$, notamment ceux dits admissibles pour un corps convexe donné. On définissait les minima successifs, permettant d'avoir une vue approximative du convexe, et on donnait une preuve non constructive (due à Rogers) de l'existence d'un réseau admissible de déterminant inférieur au volume du convexe (théorème de Hlawka), résultat lié notamment à la thématique des pavages (packings).

Enfin, la quatrième partie traitait d'un algorithme de réduction de base : comment, étant donnée une norme, modifier la base d'un réseau entier pour que les normes de ses vecteurs ne soient pas "trop grandes", c'est-à-dire qu'on puisse les borner explicitement. La réduction de base LLL (Lenstra-Lenstra-Lovász), pour la norme euclidienne, a constitué une avancée algorithmique significative pour différents domaines, notamment en cryptographie. Ici, il s'agissait d'étudier une généralisation due à Lovász et Scarf aux fonctions de jauge.

[1] Il y avait à ce propos une erreur d'énoncé à la question 2.11, le membre droit de la dernière inégalité aurait dû être $q^{-1-1/n}$, ou plus logiquement $q^{-1}N^{-1/n}$. Petite imprécision à la question 2.7 également : $\vec{z}_1$ et $\vec{z}_2$ sont évidemment différents.

Remarques générales

Cette année, le sujet était volontairement un peu plus difficile, de façon à éviter les copies grappillant des points sur les questions faciles, sans chercher à avancer de façon linéaire dans le sujet, et les démonstrations fleuves, souvent fausses, sur les questions de difficulté moyenne. Le but était de privilégier les copies capables de trouver les bons arguments et d'établir des démonstrations complètes. Ainsi, comme indiqué dans son introduction, le sujet ne comportait que très peu de questions élémentaires, toutes nécessitant une réflexion préliminaire et interdisant de se lancer directement dans la rédaction. Malgré ces difficultés, toutes les questions des deux premières parties, hormis la question 1.5, ont été résolues. En revanche, le sujet était trop long pour être traité en entier dans le temps imparti : la troisième partie n'a été qu'effleurée et la dernière partie n'a pas été considérée.
À la différence des années précédentes, et peut-être donc du fait du sujet, les correcteurs n'ont pas eu à déplorer cette année de problèmes majeurs de rédaction : très peu de grappillage, de démonstrations fausses (à l'exception d'erreurs récurrentes pour quelques questions détaillées ci-après), ou d'arnaques, même si on en trouve toujours. Au contraire, globalement, les correcteurs ont pu apprécier la qualité des raisonnements et de la rédaction et encouragent les futurs candidats à poursuivre dans cet esprit dans les années à venir. En revanche, les copies révèlent une population des candidats scindée en deux, ceux traitant (parfois partiellement) les questions 1.1, 1.2, 1.3 (mais pas la terminaison), 1.4.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, et ceux résolvant correctement ces questions et passant la barrière de la difficulté (une soixantaine de candidats) pour s'aventurer avec succès au delà de celles-ci.

Questions détaillées

Les paragraphes suivants commentent les réponses données pour les deux premières parties.

Questions 1.1 et 1.2 Ces questions, les plus simples du sujet, avaient pour but de permettre aux candidats de se familiariser avec les propriétés de convexité, de générateurs et d'inégalités vectorielles linéaires. Elles ont été très bien traitées, dans l'immense majorité des copies. Certaines ont oublié néanmoins une des deux inclusions nécessaires à la question 1.2.d. Enfin, un tiers seulement des copies a su répondre à la question 1.2.e.

Question 1.3 De nombreuses copies ont omis la partie la plus importante de la première sous-question : le fait que l'algorithme soit bien défini et notamment, qu'à chaque itération, l'ensemble $\mathcal{D}$ reste une base. C'est un oubli récurrent, d'une année sur l'autre, dès qu'il s'agit de vérifier qu'un algorithme, une fonction ou tout autre objet mathématique est bien défini (voir plus loin). Peut-être les candidats pensent-ils à tort que ceci ne rapporte pas de point ? Concernant la partie centrale et difficile de cette question, la terminaison de l'algorithme, un peu plus d'une trentaine de copies en a donné une réponse parfaite.

Question 1.4 Une grande partie des candidats a bien su utiliser le lemme de Farkas mais seulement 3 candidats ont compris l'argument permettant de se restreindre à un nombre fini de demi-espaces. La deuxième partie de la question, peu évidente (il fallait utiliser deux fois l'argument, pour K puis pour J), a été bien résolue par une trentaine de candidats mais, étrangement, presque jamais les mêmes que pour la terminaison de la question 1.3.

Questions 2.1 et 2.2 La question 2.1.1 était une question de cours. Comme pour la question 1.3.1, une bonne partie des candidats explique relativement mal pourquoi l'intégrale est bien définie, alors même que le sujet demande explicitement d'en parler. Le calcul de la question 2.1.2 a été parfaitement mené dans une quarantaine de copies, en suivant l'indication. Certaines copies sont également passées par un changement de variables bidimensionnel mais sans bien justifier sa validité et le changement de domaine.
La question 2.2 était essentiellement calculatoire. Peu de candidats sont allés jusqu'au bout des calculs, il est vrai peu attirants en temps limité. On peut regretter également quelques tricheurs, se permettant de faire semblant d'atteindre la formule finale de $V_{r,n}(1)$.

Question 2.3 Cette question a été étonnamment mal traitée, surtout la deuxième partie de la question. Il s'agissait pourtant simplement de traduire en termes mathématiques une situation intuitive. Notons également une erreur apparue plusieurs fois : pour montrer le résultat sur $\overline{K} \subseteq \lambda K$, certains ont essayé d'utiliser le résultat sur l'intérieur, pensant que tout ensemble contient l'intérieur de son adhérence, ce qui est évidemment faux en général.

Questions 2.4 et 2.5 À nouveau, la plupart des candidats n'a pas prêté grande attention au bien fondé de la définition de f qui nécessitait pourtant quelque démonstration. La question (i) a été, elle aussi, mal négociée. Mais un petit tiers a compris l'importance des hypothèses sur K (intérieur contenant $\vec{0}$ et ensemble borné). La question (iii), plus difficile, n'a été traitée complètement que par quelques rares candidats.
La question 2.5, une des toute dernières questions abordées par un grand nombre de copies, a posé des difficultés à de nombreux candidats : oubli que f n'est pas nécessairement une norme (il peut lui manquer la symétrie) pour obtenir M, arguments erronés ou incomplets pour la continuité sur $\mathbb{R}$, oubli de montrer que K est borné pour la fin de la question. Néanmoins, certains sont parvenus à trouver tous les bons arguments.

Le reste du sujet a été traité de façon plus clairsemée et ne se prête donc pas à une analyse détaillée.