Dioclétien contre les barbares en Pannonie

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juillet 2008

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Introduction

Dioclétien, empereur romain de l'an 284 à l'an 305 de notre ère, doit faire face à des incursions barbares dans la province de Pannonie. La fortification des frontières orientales de l'empire n'y suffit plus et des cités importantes de cette riche province commencent à souffrir de leurs pillages répétés. La situation est tellement préoccupante qu'il n'est plus question de repousser ces envahisseurs, mais plutôt d'essayer d'arrêter leur progression. À cette fin, l'empereur Dioclétien ordonne à Maximien Hercule, César de Pannonie et fidèle ami de l'empereur, de tenir les voies de circulation à tout prix, même si cela demande de délaisser quelques cités.
Maximien Hercule, en bon stratège souhaite redéployer ses légions sur un ensemble de cités de façon à tenir toutes les voies sous son contrôle, et tout en minimisant la dispersion de son armée. Pouvez-vous l'aider à calculer un déploiement optimal de ses légions ?
Il est naturel de modéliser ce problème de la façon suivante :

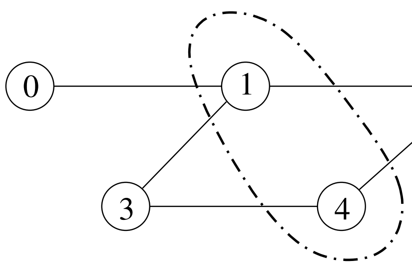
Définition 1 (Graphe) *Un graphe est un couple $G = (S, A)$ avec S un ensemble de sommets et $A \subseteq S \times S$ un ensemble d'arêtes.*
On dira qu'une arête $e = (u, v)$ est incidente à un sommet i si $i = u$ ou $i = v$.

Les sommets représentent les cités de Pannonie et les arêtes représentent les voies. Ce graphe est non-orienté et non dégénéré, c'est-à-dire que A est une relation symétrique et non réflexive. Les cités sont numérotées de 0 à $n - 1$.
Pour que les légions romaines tiennent une voie reliant deux cités, il suffit qu'elles tiennent au moins l'une de ces deux cités.

Définition 2 (couverture) *On appelle couverture du graphe G, toute partie $T \subseteq S$ de cités, telle que :*

1. *Toutes les voies de circulation soient recouvertes : $(a, b) \in A$ implique $a \in T$ ou $b \in T$.*
2. *Le cardinal de T est minimal.*

Ainsi le graphe à cinq sommets dessiné ci-dessous admet une couverture de cardinal 2 constituée des sommets 1 et 4 :



Le calcul d'une couverture est cependant un problème de grande complexité algorithmique et ne peut se faire en temps raisonnable que sur des graphes de petite taille. Le but de ce sujet est le calcul approché de couvertures. Vous serez amené(e)s à calculer par des algorithmes de faible complexité des ensembles T recouvrant toutes les voies de circulation, mais de cardinal en général non minimum. On parlera alors de couverture approchée.

2 Graphes pseudo-aléatoires

Considérons la suite entière (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \begin{cases} \textit{votre } \mathtt{u}_0 \textit{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } n = 0 \\ 15\,731 \times u_{n-1} \mod 32\,003 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Question 1 *Quelle est la valeur de* ***a)*** $u_{1\,000}$, ***b)*** $u_{10\,000}$, ***c)*** $u_{30\,000}$ *?*

On s'assurera de pré-calculer et stocker suffisamment de valeurs de u_n de manière à pouvoir y accéder en temps constant par la suite.
Pour tout $0 \leqslant i < j$, on note $v_{i,j} = u_{1+i+\frac{j(j-1)}{2}}$.

Définition 3 *Soit m un entier positif non nul, strictement inférieur à 32 003 et n un entier positif inférieur ou égal à 252. Soit $G_{m,n} = (S, A)$ le graphe à n sommets défini comme suit :*

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{0, \ldots, n-1\} \\ A & = & \{(i,j),(j,i) \mid 0 \leqslant i < j < n \textit{ t.q. } v_{i,j} \equiv 0 \mod m\} \end{array}$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté, et $s \in S$ un de ses sommets. On appelle degré de s le cardinal de l'ensemble des arêtes incidentes à ce sommet : $\deg(s) = \mathrm{card}(A \cap (\{s\} \times S))$. On appelle degré du graphe G le maximum des degrés de ses sommets.

Question 2 *Quel est le nombre d'arêtes et le degré des graphes :* ***a)*** $G_{5,10}$, ***b)*** $G_{10,50}$, ***c)*** $G_{50,250}$ *?*

On définit une relation d'ordre total sur les sommets des graphes $G_{m,n}$: $s \preceq s'$ si et seulement si $\deg(s') < \deg(s)$ ou $\deg(s) = \deg(s')$ et $s \leqslant s'$.

Question 3 *Quels sont les plus petits et plus grands sommets des graphes suivants, selon la relation $\preceq$:* ***a)*** $G_{5,10}$, ***b)*** $G_{10,50}$, ***c)*** $G_{50,250}$ *?*

3 Méthode exacte

Le calcul d'une couverture d'un graphe G peut se faire par énumération des parties T de G. Bien qu'extrêmement rudimentaire, on ne connaît pas d'algorithme de meilleure complexité. Comme la solution n'est en général pas unique, on calculera la plus petite couverture $R = \{r_1 < r_2 < \ldots < r_k\}$ selon l'ordre lexicographique. C'est-à-dire que pour toute couverture $T = \{t_1 < t_2 < \ldots < t_k\}$ distincte de R, il existe $1 \leqslant i \leqslant k$ tel que :

$$\begin{array}{rl} (i) & \text{pour tout } 0 \leqslant j < i,\ r_j = t_j \text{ et} \\ (ii) & r_i < t_i \end{array}$$

Le calcul de la couverture minimale pour l'ordre lexicographique se fait donc par énumération des parties de S de cardinal croissant, et pour les parties de cardinal identique, selon l'ordre lexicographique.

Question 4 *Calculer la couverture minimale pour l'ordre lexicographique des graphes :* ***a)*** $G_{5,10}$*,* ***b)*** $G_{6,16}$ *et* ***c)*** $G_{7,20}$*.*

Question à développer pendant l'oral : Détailler l'algorithme d'énumération des parties mis en œuvre.

4 Amélioration de la méthode exacte

On définit la relation $\approx \subseteq S \times S$ comme étant la plus petite relation d'équivalence contenant A. On appelle composante connexe du graphe G toute classe d'équivalence de $\approx$.

Question 5 *Calculer le nombre de composantes connexes ainsi que le cardinal de la plus grande des composantes connexes pour les graphes :* ***a)*** $G_{5,10}$*,* ***b)*** $G_{6,16}$*,* ***c)*** $G_{7,20}$*,* ***d)*** $G_{10,50}$*,* ***e)*** $G_{50,50}$*,* ***f)*** $G_{125,100}$*,* ***g)*** $G_{50,250}$ *et* ***h)*** $G_{360,250}$*.*

On peut remarquer que les graphes $G_{m,n}$ considérés ne sont en général pas connexes, c'est-à-dire qu'ils possèdent plusieurs composantes connexes. Ceci est normal, puisque seules les voies pavées de Pannonie sont considérées, alors que les chemins de terre, ne pouvant pas être pratiqués par les légions romaines en toute saison, sont systématiquement délaissés. Il est possible de réduire la complexité algorithmique du calcul de la couverture minimale, en calculant la couverture de chaque composante connexe du graphe, une par une.

Question 6 *Calculer le cardinal de la couverture des graphes :* ***a)*** $G_{50,50}$*,* ***b)*** $G_{125,100}$ *et* ***c)*** $G_{360,250}$*.*

5 Méthode approchée

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Le principe de la méthode approchée est le suivant :

$R \leftarrow \emptyset$
$B \leftarrow A$
tant que $B \neq \emptyset$ **faire**
  Choisir i tel qu'il existe j tel que $(i, j) \in B$
  Ajouter i à l'ensemble R
  Retirer toutes les arêtes incidentes à i de l'ensemble B
fin tant que

En sortie de l'algorithme, l'ensemble R recouvre le graphe G. Ce n'est cependant pas une couverture puisqu'en général il n'est pas de cardinal minimal. On dira que R est une couverture approchée.
On mettra en œuvre cet algorithme de façon à choisir à chaque étape le sommet i d'indice minimum.

Question 7 *Calculer le cardinal des couvertures approchées pour les graphes :* ***a)*** $G_{5,10}$*,* ***b)*** $G_{6,16}$*,* ***c)*** $G_{7,20}$*,* ***d)*** $G_{10,50}$*,* ***e)*** $G_{50,50}$*,* ***f)*** $G_{125,100}$*,* ***g)*** $G_{50,250}$ *et* ***h)*** $G_{360,250}$*.*

Question à développer pendant l'oral : Comparer les résultats obtenus avec ceux des questions 4 et 6. Détailler la complexité en temps de l'algorithme mis en œuvre.

6 Améliorations de la méthode approchée

La méthode approchée peut être améliorée dans certains cas en considérant les arêtes selon un ordre différent. À chaque étape de l'algorithme, on choisira le plus petit sommet i pour l'ordre $\preceq$.

Question 8 *Calculer le cardinal des couvertures approchées obtenues par la méthode améliorée, pour les graphes :* ***a)*** $G_{5,10}$, ***b)*** $G_{6,16}$, ***c)*** $G_{7,20}$, ***d)*** $G_{10,50}$, ***e)*** $G_{50,50}$, ***f)*** $G_{125,100}$, ***g)*** $G_{50,250}$ *et* ***h)*** $G_{360,250}$.

Question à développer pendant l'oral : Comparer les résultats obtenus avec ceux des questions précédentes. Détailler la complexité en temps de l'algorithme mis en œuvre.

On remarquera que dans certains cas, la couverture approchée ainsi calculée n'est pas minimale pour l'inclusion ensembliste. Ceci provient du fait qu'un sommet i ajouté à la couverture approchée devient redondant, du fait de l'ajout ultérieurement de tous les j extrémités d'une arête issue de i. Pour éliminer ces sommets redondants, il suffit de les parcourir dans l'ordre inverse de leur ajout à la couverture approchée. On obtient ainsi une couverture approchée minimale pour l'inclusion.

Question 9 *Calculer le cardinal des couvertures approchées ainsi obtenues, pour les graphes :* ***a)*** $G_{5,10}$, ***b)*** $G_{6,16}$, ***c)*** $G_{7,20}$, ***d)*** $G_{10,50}$, ***e)*** $G_{50,50}$, ***f)*** $G_{125,100}$, ***g)*** $G_{50,250}$ *et* ***h)*** $G_{360,250}$.

Fiche réponse type: Dioclétien contre les barbares en Pannonie

$\widetilde{u_0}$: 1

Question 1

a) 11391

b) 27932

c) 2701

Question 2

a) 14 5

b) 137 9

c) 600 14

Question 3

a) 1 3

b) 5 40

c) 21 234

Question 4

a) 7,9,1,0,5

b) 11,0,13,6,8,10

c) 16,4,2,9,8,5,14,1

Question 5

a) 1 10

b) 2 15

c) 2 19

d) 1 50

e) 25 9

f) 60 13

g) 1 250

h) 160 8

Question 6

a) 14

b) 26

c) 56

Question 7

a) 7

b) 11

c) 11

d) 39

e) 18

f) 29

g) 198

h) 75

Question 8

a) 5

b) 6

c) 8

d) 30

e) 15

f) 26

g) 149

h) 58

Question 9

a) 5

b) 6

c) 8

d) 30

e) 15

f) 26

g) 149

h) 57

◊ ◊ ◊ ◊

Fiche réponse: Dioclétien contre les barbares en Pannonie

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 8

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 9

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

◊ ◊ ◊ ◊