EPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES
ENS : PARIS - LYON - CACHAN

Durée : 6 heures
Coefficients : PARIS MP : 6 MPI : 6
LYON 4
CACHAN 5

Membres de jurys : Karine Beauchard ; Laurent Berger ; Raphaël Côte ; Antonin Guilloux ; Olivier Guichard ; Ariane Mézard ; Benjamin Schraen.

1. Contenu de l'épreuve

Le sujet de six heures de cette année portait sur le *Hausdorffien* (aussi appelé *image numérique*) d'un endomorphisme d'un **C**-espace vectoriel hermitien. La dernière partie portait sur l'inégalité de von Neumann. Les deux sujets sont liés mais pour garder à l'épreuve une longueur raisonnable, le lien n'a pas été fait.

Le Hausdorffien $\mathcal{H}(f)$ d'un endomorphisme f était défini dans l'introduction, ainsi que la terminologie concernant les endomorphismes d'un espace hermitien, ces notions n'étant pas au programme. La partie I consistait en des calculs préliminaires destinés à familiariser les candidats avec l'ensemble $\mathcal{H}(f)$. La partie II faisait faire la réduction des endomorphismes normaux. La partie III faisait calculer le Hausdorffien d'un endomorphisme en dimension 2 (on trouve un disque elliptique). Dans la partie IV, on montrait que le Hausdorffien est toujours convexe et que si f est normal, alors $\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe de ses valeurs propres. La réciproque de cela en dimension ≤ 4 faisait l'objet des questions 4.5 à 4.7 et constituait la partie la plus difficile de l'épreuve. Enfin dans la partie V on faisait établir l'inégalité de von Neumann sur les contractions.

Notons qu'un corrigé de l'épreuve assorti d'une mise en perspective paraîtra dans la RMS.

2. Résultats obtenus

La longueur de l'épreuve était calculée pour permettre à un très bon candidat de finir le problème en six heures, ce qui a été le cas (un candidat).

Partie I : cette partie a été plutôt bien traitée, mais nombre de candidats ont été ralentis à la question 1.4 car ils n'ont pas pensé à appliquer l'inégalité $xy \leq (x^2 + y^2)/2$ pour $x, y \in \mathbf{R}$. Trop de candidats ont aussi parlé d'un "théorème des valeurs intermédiaires" pour des fonctions à valeurs complexes. A la question 1.5, les candidats n'étaient pas très au point sur les questions de compacité (sup atteint, image continue d'un compact, etc). Enfin dans la question 1.6 on ne demandait pas de vérifier que E était bien un espace hermitien, ceux qui l'ont fait ont perdu du temps pour rien.

Partie II : cette partie proche du cours a été bien faite, même si trop de candidats pensaient qu'on travaillait sur **R** et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ était symétrique. La question 2.5 était légèrement ambiguë – "cette matrice" se référait-il à celle construite ou à toute matrice de f dans une base orthonormée ? La correction a tenu compte de cette ambiguïté.

Partie III : cette partie était assez calculatoire, ce qui n'a pas plu à tous les candidats (mais un bon mathématicien doit savoir calculer) et le lien entre géométrie du plan et nombre complexes était assez mal maîtrisé. La géométrie des ellipses n'était pas non plus connue de tous les candidats, notamment au niveau de la définition des axes et des propriétés des foyers. Rappelons aux candidats que les épreuves portent aussi sur le programme de première année de classes préparatoires.

Partie IV : les questions 4.1 à 4.3 ont été bien traitées par une bonne proportion de candidats. La question 4.4 demandait d'avoir les idées claires et en général, les meilleures réponses étaient les plus courtes. A la question 4.6 il fallait calculer un peu, ce qui a encore posé problème. La question 4.7 était la question la plus difficile de toute l'épreuve et n'a été correctement traitée que par une demi-douzaine de candidats. Enfin la question 4.8 était l'analogue complexe d'un exercice classique, mais les candidats vraisemblablement fatigués sont majoritairement passés à côté.

Partie V : faute de temps, cette partie a été abordée par moins de candidats, même si certains ont choisi de sauter la partie IV. Dans la question 5.1, il fallait utiliser le fait que si f est normale alors elle est diagonalisable *en base orthonormée*. De plus, les inégalités de normes étaient mal maîtrisées. Par ailleurs, très peu de candidats ont su faire l'unicité dans la question 5.2. Enfin, certains candidats n'arrivaient pas à calculer correctement la norme d'un vecteur à partir de ses coordonnées.

3. Remarques générales

Pour terminer, voici quelques remarques d'intérêt général :

– présentation des copies : sur plusieurs questions, les correcteurs n'ont pas pu mettre de points à certains candidats car ils n'arrivaient pas à déchiffrer ce qui était écrit.
– erreurs d'énoncé : si cela peut malheureusement se produire, les candidats qui obtiennent des résultats incompatibles avec l'énoncé sont invités à la prudence. Signaler l'incompatibilité est une marque de maturité mathématique ; écrire "erreur d'énoncé" et le souligner trois fois ne peut qu'agacer le correcteur (qui est aussi le concepteur pour certaines copies). Le problème de cette année ne comportait pas d'erreur d'énoncé.