**EPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES**

**ENS : LYON**

*Durée : 45mn* *Coefficients* **: option MP 6** **option MPI 4**

**MEMBRES DE JURYS : Thierry BARBOT, Philippe GILLE**

---

Comme les années précédentes, les exercices ont été conçus pour permettre d'évaluer la fiabilité des connaissances des candidats, et leur aptitude à manipuler différents aspects du programme. Dans cette épreuve, ces qualités ont le plus souvent suffi au candidat pour obtenir un résultat positif. La différence entre les bons candidats et les autres consiste bien souvent dans la compréhension de la motivation de telle ou telle notion développée dans le programme.

Nous avons relevé avec satisfaction que les erreurs graves et saugrenues sont devenues bien plus rares. Nous n'avons cette fois-ci relevé que peu de faute ou lacune particulière apparaissant de manière récurrente. Donnons cependant quelques aperçus: beaucoup oublient qu'une condition pour être vecteur propre est déjà d'être non-nul. D'autres semblent penser que la somme de deux suites non bornées est toujours bornée. Il est regrettable qu'il soit si souvent oublié qu'être unitaire signifie préserver la norme hermitienne. Enfin, une bonne partie des candidats continuent de pêcher en omettant d'étudier les domaines de définition des fonctions ce qui pourtant peut être le point initial de l'exercice. Par ailleurs, des calculs simples avec des nombres complexes ou avec des parties entières se révèlent délicats pour nombre de candidats. En outre, il est arrivé que des candidats, bien instruits par ailleurs, soient mal à l'aise avec le maniement graphique des complexes.

Il nous semble utile d'apporter quelques commentaires et conseils à propos de l'attitude à adopter:

- prendre en charge la résolution de l'exercice, sans attendre ostensiblement des indications supplémentaires éventuelles à venir,
- ne pas pour autant rejeter ces indications si elles viennent;
- exposer avec clarté ses arguments et sa pensée en veillant à éviter toute ambigüité. Si le candidat maîtrise parfaitement un élément du programme (par exemple, utilisation du polynôme caractéristique associé à une suite définie par récurrence liant trois termes consécutifs) il n'y a aucun déshonneur à exposer avec précision la méthode. Ceci n'empêche pas la concision, et permet sans grande perte de temps de se distinguer des autres candidats plus approximatifs,

Voici quelques exercices qui ont été posés:

- Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie n de l'espace des applications $C^\infty$ de **R** dans **C**, stable par l'opérateur de dérivation d.

1. Montrer que E est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
2. Soit A l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec d. Montrer que A est un espace vectoriel de dimension n.

- Soit B l'espace vectoriel des suites bi-infinies (indexées par **Z**) bornées de nombres complexes. Soit T l'application linéaire qui à un élément $(u_n)_{(n \in \mathbf{Z})}$ de B associe la suite $(v_n)_{(n \in \mathbf{Z})}$ avec:

$$v_n = u_{n+1} + u_{n+2}$$

1. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de T.
2. Pour toute valeur propre a, trouver le noyau de $(T\text{-}a.id)^2$
3. Trouver tous les sous-espaces vectoriels de B qui sont T-invariants.

- Soit t un nombre réel. Pour tout x >0, on pose $x^{it}$= exp( i t log(x)). Etudier le comportement asymptotique de la suite u_n= 1/n ( $1+ 2^{it} + 3^{it}$ .... + $n^{it}$ ).

- Si X est une matrice carrée réelle orthogonale de taille n >1, montrer que :

$$\det(X)= (-1)^{rg(1-X)} .$$

- Soit T>0. Soit f: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue T-périodique. On pose:

$$V(f) = \int_0^T \int_0^T | f(t)-f(s) |^2 \, ds \, dt .$$

1. Montrer que V(f)=0 si et seulement si f est constante.
2. On suppose f de classe $C^2$. Exprimer V(f) en fonction des coefficients de Fourier de f.
3. Soit F: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction lipschitzienne de constante λ>0, c'est-à-dire satisfaisant $| F(z_1)-F(z_2) | \leq | z_1 - z_2 |$ pour tout $z_1$, $z_2$ dans **C**.
   On suppose que l'équation différentielle y'=F(y) admet une solution T-périodique.
   Montrer que $T \geqq 2\pi / \lambda$.