94.07B

SESSION 2009

Filière BCPST

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrice est interdit.

Ce sujet porte sur l'étude de modèles de Lotka-Volterra compétitifs, également appelés modèles logistiques, déterministes et aléatoires.

Il comporte une partie de préliminaires suivie de trois parties, la troisième étant découpée en deux sous-parties. Les préliminaires sont utilisés dans les parties I et III. La partie I est indépendante des parties II et III, excepté pour la dernière question de la partie III. La partie III fait usage de résultats de la partie II, dont les énoncés apparaissent explicitement dans le texte du sujet. Ainsi, à condition de lire attentivement la partie II ainsi que l'introduction de chaque partie, les candidats pourront traiter le sujet dans l'ordre qu'ils souhaitent. Les équations numérotées sont susceptibles d'être utilisées plus loin dans le texte du sujet.

Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment. Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Notations

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, celui des nombres réels positifs $\mathbb{R}_+$ et celui des nombres réels strictement positifs $\mathbb{R}_+^*$. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^*$.

On utilisera la notation $\mathbb{1}_{\{x\in A\}}$ pour la fonction indicatrice de l'ensemble A, qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

On rappelle que la fonction exponentielle, qui sera noté indifféremment e^x ou $\exp(x)$ dans l'énoncé, satisfait la relation

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

où, par définition, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ et, par convention, $0! = 1$. Le logarithme (népérien) est désigné par log.

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sera notée $\mathrm{Exp}(\lambda)$. On rappelle que sa densité est donnée par

$$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geqslant 0\}}.$$

On emploiera les abréviations v.a. pour variable(s) aléatoire(s) et i.i.d. pour indépendantes et identiquement distribuées.

On utilisera la notation sup pour la borne supérieure d'un ensemble de réels. Si f est une fonction à valeurs réelles, on écrira

$$\sup_{t\in[a,b]} f(t) \quad \text{pour} \quad \sup\{f(t) \text{ tel que } t \in [a,b]\}.$$

Il s'agit de la borne supérieure des valeurs prises par la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. On désignera également par $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$ (resp. $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$) le plus petit (resp. le plus grand) des nombres réels $a_1, \ldots, a_n$.

Enfin, considérant un système d'équations différentielles de dimension $d \in \mathbb{N}^*$, écrit sous forme vectorielle

$$y' = F(y),$$

où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, on appellera **équilibre** de ce système tout point $y^* \in \mathbb{R}^d$ tel que $F(y^*) = 0$. On **admettra** que, si F est continue et si $y(t)$ est une solution à ce système qui converge vers une limite *finie* y^* quand $t \to +\infty$, alors y^* est nécessairement un *équilibre* du système.

Introduction

On va s'intéresser dans ce problème à des extensions du modèle classique introduit pour la première fois par Lotka en 1920 dans le cadre de la modélisation des réaction chimiques, puis par Volterra en 1926 dans le cadre de la dynamique de populations de proies et prédateurs. Dans ce sujet, l'interprétation de ces modèles sera formulée en terme de dynamiques de populations.

L'ensemble du problème traite des modèles de Lotka-Volterra **compétitifs déterministes et aléatoires** de dimension 1 et 2. Du point de vue des dynamiques de populations, ces modèles servent à décrire la compétition entre deux espèces ou deux sous-populations (par exemple, les individus de type mutant et de type sauvage d'une même espèce), ou bien entre individus d'une même espèce ou d'une même sous-population. Il peut être commode de penser à une compétition entre individus pour des ressources.

La première partie du problème traite du comportement en temps long des systèmes de Lotka-Volterra compétitifs **déterministes** en dimension 2. La deuxième partie définit et étudie certaines propriétés du processus de Poisson. Enfin, la troisième partie utilise ces résultats pour construire et étudier les processus de Lotka-Volterra compétitifs discrets **aléatoires** en grande population.

Préliminaires : Équation logistique en dimension 1

Cette partie traite de quelques propriétés simples de l'équation de Lotka-Volterra compétitive en dimension 1, aussi connue sous le nom d'équation logistique.

Soit r et c dans $\mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation différentielle

$$y' = y(r - cy) \tag{1}$$

avec condition initiale $y(0) = y_0 \geqslant 0$.

1. Donner une interprétation des paramètres de cette équation.

2. On cherche dans cette question à calculer $y(t)$.

a) Que vaut $y(t)$ lorsque $y_0 = 0$?

b) En effectuant le changement de fonction inconnue $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, calculer $y(t)$ lorsque $y_0 > 0$.

c) Montrer que $y(t) \leqslant \max\{y_0, \frac{r}{c}\}$ pour tout $t \geqslant 0$.

3. Calculer la limite de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$ en fonction de y_0. Vérifier que cette limite est un équilibre de l'équation différentielle (1).

Première partie : Systèmes de Lotka-Volterra compétitifs déterministes

Cette partie porte sur l'étude des systèmes de Lotka-Volterra compétitifs en dimension 2, définis comme suit.

Soit $r_1, r_2, c_{11}, c_{12}, c_{21}$ et c_{22} dans $\mathbb{R}_+^*$. On considère le système d'équations différentielles de dimension 2

$$\begin{cases} y_1' = y_1(r_1 - c_{11}y_1 - c_{12}y_2) \\ y_2' = y_2(r_2 - c_{21}y_1 - c_{22}y_2) \end{cases} \tag{2}$$

avec condition initiale $(y_1(0), y_2(0)) \in \mathbb{R}_+^2$. On notera $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ et $y_0 = (y_1(0), y_2(0))$. On admettra que, pour toute condition initiale, ce système admet une solution unique définie pour tout temps.

On introduit les deux quantités suivantes :

$$f_1 = r_1 - r_2\frac{c_{12}}{c_{22}} \quad \text{et} \quad f_2 = r_2 - r_1\frac{c_{21}}{c_{11}}. \tag{3}$$

On supposera que $f_1 \neq 0$ et $f_2 \neq 0$.
On pose $\bar{r} = \max\{r_1, r_2\}$, $\underline{r} = \min\{r_1, r_2\}$, $\bar{c} = \max\{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}\}$ et $\underline{c} = \min\{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}\}$.

1. Donner une interprétation des paramètres du système (2).

2. Dans le plan cartésien de coordonnées (y_1, y_2), on considère les deux droites D_1 et D_2 d'équations

$$c_{11}y_1 + c_{12}y_2 = r_1 \quad \text{et} \quad c_{21}y_1 + c_{22}y_2 = r_2, \quad \text{respectivement.}$$

a) On suppose dans cette question que $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$. Donner une représentation graphique des droites D_1 et D_2. Ces droites s'intersectent-elles dans le quart de plan $y_1 \geqslant 0$ et $y_2 \geqslant 0$? Quelle est leur position relative dans ce quart de plan ?

b) On suppose maintenant que $f_1 f_2 < 0$. Montrer que le système (2) a 3 équilibres appartenant à $\mathbb{R}_+^2$.

c) On suppose enfin que $f_1 f_2 > 0$. Montrer que le système (2) a 4 équilibres appartenant à $\mathbb{R}_+^2$.

3. ***a)*** Vérifier que

$$y_1(t) = y_1(0)\exp\left(r_1 t - c_{11}\int_0^t y_1(s)ds - c_{12}\int_0^t y_2(s)ds\right)$$

et donner une expression similaire pour $y_2(t)$. En déduire que $y_1(t) \geqslant 0$ et $y_2(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et que, si $y_1(0) > 0$ (respectivement, $y_2(0) > 0$), alors $y_1(t) > 0$ (respectivement $y_2(t) > 0$) pour tout $t \geqslant 0$.

b) On pose $z(t) = y_1(t) + y_2(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. On suppose que $z(0) \leqslant A$ pour $A > \dfrac{\bar{r}}{\underline{c}}$ fixé. Quel est le signe de $z'(t)$ pour tout $t \geqslant 0$ tel que $z(t) = A$? En déduire que $z(t) \leqslant A$ pour tout $t \geqslant 0$.

4. On suppose de nouveau dans cette question que $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$. On cherche à déterminer le comportement quand $t \to +\infty$ de la solution du système (2).

a) On considère les ensembles

$$E_1 = \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 \text{ tel que } c_{11}y_1 + c_{12}y_2 < r_1\},$$
$$E_2 = \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 \text{ tel que } c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \geqslant r_1 \text{ et } c_{21}y_1 + c_{22}y_2 \leqslant r_2\},$$
$$E_3 = \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 \text{ tel que } c_{21}y_1 + c_{22}y_2 > r_2\}.$$

Représenter graphiquement ces ensembles.

b) Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, examiner le signe de $y_1'(t)$ et $y_2'(t)$ pour t tel que $y(t) = (y_1(t), y_2(t)) \in E_i$. Faire de même lorsque $y(t) \in D_1$, et lorsque $y(t) \in D_2$.
En déduire que, s'il existe $s \geqslant 0$ tel que $y(s) \in E_2$, alors $y(t) \in E_2$ pour tout $t \geqslant s$.

c) En déduire que, pour toute condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}_+^2$, $y(t)$ converge vers une limite finie y^* quand $t \to +\infty$. On rappelle que y^* est nécessairement un équilibre du système (2).

d) Soit $\varepsilon \in]0, \underline{r}/\bar{c}[$. Quel est le signe de $y_1'(t) + y_2'(t)$ pour $t \geqslant 0$ tel que $y_1(t) + y_2(t) = \varepsilon$? En déduire que, si $y_0 \neq 0$, alors $y^* \neq 0$.

e) Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{f_2}{2\bar{c}}\right[$. Soit t tel que $\left|y_1(t) - \frac{r_1}{c_{11}}\right| < \varepsilon$ et $0 < y_2(t) < \varepsilon$. Quel est le signe de $y_2'(t)$? Que peut-on en conclure sur y^* ?

f) Donner la limite de $y(t)$ quand $t \to +\infty$ en fonction de $y_0 \in \mathbb{R}_+^2$. Que signifie ce résultat en terme de coexistence des deux populations lorsque $t \to +\infty$?

Deuxième partie : Le processus de Poisson

Soit Ω un ensemble fondamental (ou univers) donné muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Cette partie et la suivante traitent de **fonctions aléatoires du temps**, aussi appelées **processus**. Plus précisément, on dira que X est un processus si $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$. Afin d'alléger les notations, on notera $X(t)$ au lieu de $X(t, \omega)$ lorsque l'épreuve $\omega \in \Omega$ sera fixée. On utilisera parfois la notation $(X(t), t \geqslant 0)$ pour désigner le processus X.

On dira que $P : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un **processus de Poisson** s'il existe une suite $(E_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. i.i.d. de loi Exp(1) telle que $E_n(\omega) > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\omega \in \Omega$, et

$$P(t) = P(t, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t \geqslant S_n(\omega)\}} \qquad \forall (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \tag{4}$$

où

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} E_j \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée **suite des instants de sauts** du processus de Poisson.

Soit deux processus de Poisson $(P_1(t), t \geqslant 0)$ et $(P_2(t), t \geqslant 0)$ obtenus respectivement par l'expression (4) à partir des suites de v.a. exponentielles $(E_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ et $(E_n^{(2)})_{n\geqslant 1}$. On dira que P_1 et P_2 sont **indépendants** si les suites de v.a. $(E_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ et $(E_n^{(2)})_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes. On dira également que P_1 est indépendant d'une v.a. Y donnée si la suite $(E_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ est indépendante de Y.

Dans toute cette partie, on considère un processus de Poisson $(P_t, t \geqslant 0)$ fixé, construit à partir d'une suite $(E_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. i.i.d. de loi Exp(1) donnée.

1. *a)* Montrer que $P(0) = 0$ et que $t \mapsto P(t)$ est une application (aléatoire) croissante. Que vaut $P(S_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier le nom "instants de sauts" pour la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$. Montrer que $t \mapsto P(t)$ ne peut pas sauter de 2 ou plus à un instant de saut donné. Donner une représentation graphique de la fonction $t \mapsto P(t)$ en indiquant les v.a. E_n et S_n.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la loi de S_n a pour densité

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \mathbb{1}_{\{x \geqslant 0\}}.$$

c) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \leqslant A) \to 0$ quand $n \to +\infty$, puis que $\mathbb{P}(S_n \leqslant A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*) = 0$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que, si S_n ne tend pas vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n \leqslant N$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\mathbb{P}(S_n \to +\infty) = 1$, $\mathbb{P}(P(t) < +\infty) = 1$ et $\mathbb{P}(P(t) \in \mathbb{N}) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Le but de cette question est de montrer que $P(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre t.

a) Quelle est la densité jointe de (S_n, E_{n+1}) ?

b) Montrer que $\mathbb{P}(P(t) = n) = \displaystyle\int_0^t \int_{t-s}^{+\infty} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(s+u)}\, du\, ds.$

c) Conclure.

3. Le but de cette question est de montrer que, pour t fixé, $P(t)$ est proche de t avec grande probabilité.

a) Soit la fonction $h(u) = \log(1+u) - u + \dfrac{u^2}{2}$. Montrer que $h(u) \geqslant 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

Montrer également que $\log(1-u) \geqslant -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{2u^3}{3}$ pour tout $u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b) Calculer $\mathbb{E}\left[e^{\lambda P(t)}\right]$ pour tout $t \geqslant 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. En déduire que, pour tout $\lambda \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(P(t) - t > \varepsilon) \leqslant \exp\Big((e^\lambda - 1 - \lambda)t - \lambda\varepsilon\Big).$$

d) En calculant la valeur optimale de λ dans l'inégalité précédente, montrer que

$$\mathbb{P}(P(t) - t > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2t}\left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)\right).$$

e) En utilisant un argument similaire avec $\lambda \leqslant 0$, montrer que, pour tout $t \geqslant 2\varepsilon$,

$$\mathbb{P}(P(t) - t < -\varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{5\varepsilon^2}{12t}\right).$$

f) En déduire que, pour tout $t \geqslant 2\varepsilon$,

$$\mathbb{P}(|P(t) - t| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4t}\right).$$

g) Montrer que, si $t = \varepsilon$,

$$\mathbb{P}(|P(t) - t| > t) = \mathbb{P}(P(t) > 2t) \leqslant \exp((1 - 2\log 2)t).$$

On rappelle que $1 - 2\log 2 < 0$.

4. Le but de cette question est de montrer que $P(t)$ n'est pas trop éloigné de t sur de grands intervalles de temps avec grande probabilité. Soit $T > 0$ et $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ fixés.

a) Soit $K \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que, si $|P(k\varepsilon) - k\varepsilon| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$, alors $|P(t) - t| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $t \in [0, K\varepsilon]$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et K le plus petit entier supérieur à $N^{1-\alpha}T$. Déduire de la question précédente que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,NT]} |P(t) - t| > 2N^\alpha\Big) \leqslant \exp((1 - 2\log 2)N^\alpha) + 2\sum_{k=2}^{K} \exp\left(-\frac{N^\alpha}{4k}\right).$$

c) Montrer que pour N assez grand, $\exp((1 - 2\log 2)N^\alpha) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{N^\alpha}{4K}\Big)$ puis que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,NT]} |P(t) - t| > 2N^\alpha\Big) \leqslant 2(T+1)N^{1-\alpha} \exp\left(-\frac{N^{2\alpha-1}}{4(T+1)}\right).$$

d) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{N} \sup_{t\in[0,NT]} |P(t) - t| > \varepsilon\Big) = 0.$$

Troisième partie : Processus logistique

Le but de cette partie est de définir, construire et démontrer quelques propriétés du **processus de Lotka-Volterra compétitif** en dimension 1, aussi appelé **processus logistique**, qui est un équivalent aléatoire de la solution de l'équation différentielle (1).

A Construction du processus logistique

Soient b, c, d des constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ fixées. Soit Z une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soient P_1 et P_2 deux processus de Poisson indépendants et indépendants de la v.a. Z. On note $(E_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ et $(E_n^{(2)})_{n\geqslant 1}$ les suites de v.a. i.i.d. Exp(1) associées à P_1 et P_2, respectivement. On note également $S_n^{(1)}$ et $S_n^{(2)}$ les suites d'instants de sauts associées à P_1 et P_2, respectivement.

On considère un processus $X = (X(t), t \geqslant 0)$ satisfaisant pour tout $\omega \in \Omega$ l'équation

$$X(t) = Z + P_1\left(b\int_0^t X(s)ds\right) - P_2\left(d\int_0^t X(s)ds + c\int_0^t X(s)^2 ds\right) \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{5}$$

On admettra que cette équation admet une unique solution définie pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ et telle que les intégrales apparaissant dans (5) sont toutes finies.

1. *a)* Que vaut $X(0)$? Montrer que $X(t) \in \mathbb{Z}$ pour tout $t \geqslant 0$.

b) Soient $t \geqslant 0$ et $\omega \in \Omega$ tels que $X(t, \omega) = 0$.
On considère les fonctions $f(u) = b\int_0^u X(s,\omega)ds$ et $g(u) = d\int_0^u X(s,\omega)ds + c\int_0^u X(s,\omega)^2 ds$.

Soient n et m dans $\mathbb{N}^*$ tels que $S_n^{(1)} \leqslant f(t) < S_{n+1}^{(1)}$ et $S_m^{(2)} \leqslant g(t) < S_{m+1}^{(2)}$. Soit enfin $s \geqslant t$ tel que $f(s) < S_{n+1}^{(1)}$ et $g(s) < S_{m+1}^{(2)}$.
Que vaut $X(s,\omega)$? Exprimer $f(s)$ et $g(s)$ en fonction de $f(t)$ et $g(t)$.
En déduire que $X(s,\omega) = 0$ pour tout $s \geqslant t$.

c) Montrer que $X(t) \in \mathbb{N}$ pour tout $t \geqslant 0$.

2. Soit $\lambda > 0$ et E une v.a. de loi Exp(1). Quelle est la loi de $\dfrac{E}{\lambda}$? son espérance ? sa variance ? sa fonction de répartition ?

3. Soit deux v.a. E_1 et E_2 indépendantes de loi $\text{Exp}(\lambda)$ et $\text{Exp}(\mu)$, respectivement. Calculer $\mathbb{P}(\min\{E_1, E_2\} \geqslant x)$ pour $x \geqslant 0$. Quelle est la loi de $\min\{E_1, E_2\}$? Calculer $\mathbb{P}(E_1 \leqslant E_2)$.

4. ***a)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $Z(\omega) = k$, on note $T_1(\omega)$ le temps tel que $X(t,\omega) = k$ pour tout $t \in [0, T_1(\omega)[$ et $X(T_1(\omega),\omega) = k+1$ ou $k-1$. Montrer que

$$T_1(\omega) = \min\left\{\frac{E_1^{(1)}(\omega)}{bk}, \frac{E_1^{(2)}(\omega)}{dk + ck^2}\right\}.$$

En répétant cette construction pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en posant $T_1(\omega) = +\infty$ si $Z(\omega) = 0$, on définit ainsi une v.a. T_1 à valeurs dans $]0, +\infty]$, appelée **premier instant de saut** de X.

b) Soit k tel que $\mathbb{P}(Z = k) > 0$. Calculer la fonction de répartition de T_1 conditionnellement à $\{Z = k\}$. Calculer également $\mathbb{P}(X(T_1) = k+1 \mid Z = k)$ et $\mathbb{P}(X(T_1) = k-1 \mid Z = k)$.

c) Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit

$$\forall t \geqslant 0, \qquad X'(t) = \begin{cases} X(T_1 + t) & \text{si } T_1 < +\infty \\ 0 & \text{si } T_1 = +\infty. \end{cases}$$

On admettra qu'il existe deux processus de Poisson P_1' et P_2' indépendants et indépendants de $X(T_1)$ tels que $P_1'(t) = P_1(T_1 + t) - P_1(T_1)$ et $P_2'(t) = P_2(T_1 + t) - P_2(T_1)$ lorsque $T_1 < +\infty$.
Montrer que

$$X'(t) = X'(0) + P_1'\left(b\int_0^t X'(s)ds\right) - P_2'\left(d\int_0^t X'(s)ds + c\int_0^t X'(s)^2 ds\right) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

d) Expliquer comment le processus X peut être construit récursivement en définissant une **suite d'instants de sauts** $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et à valeurs dans $]0, +\infty]$.

e) Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ (resp. $(G_n)_{n\geqslant 1}$, resp. $(H_{n,m})_{n,m\geqslant 1}$) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\text{Exp}(b)$ (resp. $\text{Exp}(d)$, resp. $\text{Exp}(c)$). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les lois de

$$\min\{F_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\} \qquad \text{et} \qquad \min\big\{\ \{G_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{H_{i,j},\ 1 \leqslant i,j \leqslant k\}\ \big\}?$$

Si l'on suppose que le processus X représente le nombre d'individus d'une population en fonction du temps, expliquer pourquoi les paramètres b, d et c peuvent être appelés taux de naissance, mort et compétition *individuels*.

B Limite de grande population

On introduit maintenant un paramètre $N \in \mathbb{N}^*$ et la suite de processus logistiques $(X_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ obtenue en remplaçant c par $\frac{c}{N}$. Plus précisément, soit une suite $(X_N(0))_{N\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de P_1 et P_2. Pour tout $N \geqslant 1$, on définit le processus X_N par

$$X_N(t) = X_N(0) + P_1\left(b\int_0^t X_N(s)ds\right) - P_2\left(d\int_0^t X_N(s)ds + \frac{c}{N}\int_0^t X_N(s)^2ds\right) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

On définit également $Y_N(t) = \dfrac{X_N(t)}{N}$.

On note $r = b - d$ et on suppose que $r > 0$. On fixe $y_0 \geqslant 0$ et on appelle $y(t)$ la solution de l'équation différentielle logistique (1) telle que $y(0) = y_0$. On rappelle que $y(t) \leqslant M_1$ pour tout $t \geqslant 0$, où $M_1 = \max\{y_0, \frac{r}{c}\}$.

On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $Y_N(0) \leqslant C$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_N(0) - y_0| > \varepsilon) = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Soit $T > 0$ fixé. Le but de cette sous-partie est de démontrer que, quand $N \to +\infty$, $Y_N(t)$ converge vers $y(t)$ pour $t \in [0, T]$ en un sens précisé plus loin.

5. Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. On suppose qu'il existe deux constantes $A \geqslant 0$ et $B > 0$ telles que

$$f(t) \leqslant A + BF(t) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Soit $G(t) = \dfrac{A}{B}(e^{Bt} - 1)$. Montrer que $F(t) \leqslant G(t)$ pour tout $t \geqslant 0$, puis que

$$f(t) \leqslant Ae^{Bt} \qquad \forall t \geqslant 0.$$

6. On introduit les processus $Q_1(t) = P_1(t) - t$ et $Q_2(t) = P_2(t) - t$. Montrer que

$$Y_N(t) - y(t) = Y_N(0) - y_0 + r\int_0^t (Y_N(s) - y(s))ds - c\int_0^t [Y_N(s)^2 - y(s)^2]ds + \varepsilon_N(t)$$

où

$$\varepsilon_N(t) = \frac{1}{N}Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right) - \frac{1}{N}Q_2\left(Nd\int_0^t Y_N(s)ds + Nc\int_0^t Y_N(s)^2ds\right).$$

Montrer également que

$$Y_N(t) \leqslant Y_N(0) + b\int_0^t Y_N(s)ds + \frac{1}{N}Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right).$$

7. En déduire que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_N(t) \leqslant \left(C + \frac{1}{N}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right)\right|\right)e^{bt}.$$

8. Soit t_0 le premier instant où $Y_N(t_0) \geqslant M_2$ où $M_2 = (C+1)e^{bT}$ et soit $S = \min\{T, t_0\}$. En déduire que, pour tout $t < S$,

$$Y_N(t) \leqslant \Big(C + \frac{1}{N} \sup_{0 \leqslant u \leqslant NbTM_2} \big|Q_1(u)\big|\Big) e^{bT}.$$

Déduire de la partie II que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(t_0 > T) = 1.$$

9. Montrer que pour tout $t < S$,

$$|Y_N(t) - y(t)| \leqslant |Y_N(0) - y_0| + \sup_{0 \leqslant t \leqslant S} |\varepsilon_N(t)| + (r + c(M_1 + M_2)) \int_0^t |Y_N(s) - y(s)| ds.$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |Y_N(t) - y(t)| > \varepsilon\Big) \leqslant \mathbb{P}(t_0 \leqslant T) + \mathbb{P}\left(|Y_N(0) - y_0| > D\varepsilon\right) + \mathbb{P}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant S} |\varepsilon_N(t)| > D\varepsilon\Big),$$

où $D = \frac{1}{2} e^{-(r + c(M_1 + M_2))T}$.

10. Conclure que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\quad \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |Y_N(t) - y(t)| > \varepsilon\Big) = 0.$

Justifier le nom "limite de grande population" donné à cette limite.

11. On suppose que $y_0 > 0$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\exists t \geqslant 0 \text{ tel que } Y_N(t) \in \Big[\frac{r}{c} - \delta, \frac{r}{c} + \delta\Big]\right) = 1.$$

12. ***a)*** Donner les équations permettant de définir un couple de processus (X_1, X_2) généralisant le processus logistique (5) à la dimension 2. On utilisera des paramètres $b_1, b_2, d_1, d_2, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ similaires à ceux apparaissant dans l'équation (2).

b) Comment modifier ces équations pour construire des processus $(X_1^{(N)}, X_2^{(N)})$ correspondant aux processus X_N ? Énoncer un résultat similaire à celui de la question **10.** Expliquer brièvement comment l'étude du processus $|Y_1^{(N)}(t) - y_1(t)| + |Y_2^{(N)}(t) - y_2(t)|$ permet d'adapter la méthode précédente pour démontrer ce résultat.

c) Dans le cas où $y_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$, où f_1 et f_2 sont définis dans (3), énoncer un résultat similaire à celui de la question **11.** portant sur les processus $(X_1^{(N)}, X_2^{(N)})$. Quelle information donne ce résultat sur la compétition entre les deux populations ?

Fin du problème.