ÉPREUVE ÉCRITE de MATHÉMATIQUES 2009

ENS : PARIS – LYON - CACHAN

Durée : 4 heures
Coefficients/Total général : Paris 16/145 ; Lyon 4/58,5 ; Cachan 4/65

MEMBRES du JURY : Nicolas CHAMPAGNAT, Stéphane GÉNIEYS

L'épreuve 2009 portait sur l'étude de modèles de Lotka Volterra compétitifs déterministe et aléatoires. Ces modèles appartiennent à la famille bien connue des modèles de Lotka-Volterra, qui généralisent celui décrit par Lotka en 1920 dans le cadre de la modélisation de réactions chimiques, puis par Volterra en 1926 dans le cadre d'une dynamique de populations de proies et prédateurs. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec des non-linéarités quadratiques. Chaque coordonnée du système représente la *densité* d'une (sous-)population. La notion de densité est une quantité réelle positive (continue), approchant un nombre d'individu (discret), correctement normalisé. Les systèmes de Lotka-Volterra sont appelés *compétitifs* lorsque tous les termes quadratiques de l'équation différentielle ont une constante multiplicative *négative*. La non-linéarité empêche alors l'explosion de la population totale. Il s'agit d'une des classes de modèles les plus simples présentant une limitation dans la taille de la population. Le système modélise alors classiquement une compétition entre (sous-)espèces, par exemple pour des ressources. La première moitié du sujet porte sur l'étude de ces systèmes en dimension 1 et 2, et la seconde moitié sur l'étude d'une extension aléatoire du modèle, où le caractère fini de la population est pris en compte, et où chaque naissance et mort est modélisée. Le but final du sujet est de préciser le lien entre le modèle déterministe et le modèle aléatoire.

La partie préliminaire du sujet porte sur le cas de la dimension 1, où le modèle prend la forme de l'équation logistique bien connue. La solution explicite à l'équation différentielle est calculée. La première partie traite du cas de la dimension 2, où la solution du système n'a pas d'expression explicite connue. Par contre, son analyse asymptotique est bien connue, et toute solution du système converge vers une limite finie. La méthode proposée pour cette étude est basée sur un découpage de l'espace en régions où la solution a des coordonnées monotones. Le point crucial est de démontrer que la solution ne peut sortir de l'une de ces zones, bornée. La seconde partie du sujet porte sur quelques propriétés du processus de Poisson, qui est l'un des exemples les plus simples de fonction du temps *aléatoire* (ou *processus*). Il s'agit d'une fonction croissante, issue de 0 au temps 0, et qui augmente d'une unité à des instants aléatoires obtenus à partir de variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes. Le résultat final de cette section est une estimation de la déviation autour du comportement moyen du processus en temps long (ce type de résultat est connu sous le nom d'*inégalités de déviations modérées*). La troisième partie définit le *processus de naissance et de mort logistique* comme la solution d'une équation différentielle dirigée par deux processus de Poisson indépendants. Chaque saut des processus de Poisson correspond alors soit à une naissance, soit à la mort d'un individu. Enfin, le lien entre ce modèle et l'équation différentielle ordinaire logistique est démontré dans la limite des grandes populations. Le résultat de convergence est basé sur les déviations modérées de la partie II et sur une version simple du lemme de Gronwall (question III.B.5).

Les notes vont de 2,63 à 20. La moyenne est de 8,90 et l'écart-type de 3,58. 18% des copies obtiennent une note inférieure à 6, 35% ont la moyenne, et 10% ont 14,5 ou plus.

Nous en venons maintenant à quelques commentaires détaillés sur les réponses des candidats. D'une manière générale, les questions d'interprétation biologique des modèles ont été peu traitées, ce qui est regrettable pour le concours BCPST. Il est important que le candidat montre sa capacité à mettre en rapport ses connaissances biologiques avec les modèles mathématiques. Les candidats doivent savoir que le barème favorise ces questions. En ce qui concerne la partie préliminaire, les candidats ont généralement montré leur capacité à résoudre les équation linéaires du premier ordre avec second membre, le plus souvent en résolvant le système homogène puis en calculant une solution particulière.

La première partie a été très inégalement traitée, avec beaucoup d'erreurs surprenantes à ce niveau. Dans la question 2.a), il s'agissait de montrer que deux droites D^1 et D^2 ne se coupent pas dans le quart de plan à coordonnées positives. Plusieurs méthodes étaient possibles. La plus simple consistait à observer que les ordonnées à l'origine *et* les abscisses à l'origine sont dans le bon ordre. La seconde consiste à montrer que le point d'intersection des 2 droites a forcément une coordonnée négative. Beaucoup de candidats n'ont pas hésité à écrire des énormités pour arriver au résultat. Entre autres erreurs, nous mentionnons que les inégalités $0<a<b$ et $0<c<d$ *n'impliquent pas* l'inégalité $a/c<b/d$! Il est inacceptable à ce niveau que les candidats ne sachent pas manipuler les inégalités élémentaires. Dans les question 3.a) et 4.d), un grand nombre de candidats ne semblent pas faire la différence entre les expressions « pour *t* tel que » et « lorsque pour tout *t* ». Selon nous, l'un des buts principaux de toute formation scientifique doit être l'apprentissage du raisonnement et de l'argumentation logique correcte. Ceci passe nécessairement par la compréhension de la signification logique de la syntaxe française.

La seconde partie a été elle aussi assez inégalement traitée. Elle comportait cependant plusieurs questions faciles, ou très proche des outils au programme. Nous pensons notamment aux question 1.b), 2.a) ou 3.a). D'une manière générale, beaucoup de candidats ont montré leurs lacunes en ce qui concerne variables aléatoires continues à densité. En particulier, les notions de densité jointe (ou conjointe) et de produit de convolution pour le calcul de la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes, pourtant au programme, semblent poser de nombreuses difficultés aux candidats.

Enfin, la dernière partie a été fort peu traitée, en raison de la longueur du sujet. Nous en profitons pour rappeler aux candidats que le barème tient bien entendu compte de la longueur du sujet. Ainsi, dans un sujet long, toute latitude est laissée au candidat pour le choix des parties qu'il souhaite traiter. Par contre, une fois que la partie est choisie, il est fortement conseillé au candidat de traiter au maximum la partie en question, plutôt que de faire d'incessant aller-et-retours qui lassent le correcteur et laissent une impression de superficialité. Un certain nombre de questions étaient relativement faciles, notamment la questions 2) et la première partie de la question 3). Ici encore, beaucoup de copies ont été décevantes. En particulier, si le candidat reconnait la loi d'une variable aléatoire, il doit le préciser. Certains candidats opportunistes ont également correctement traité certaines question plus faciles de la partie B, comme par exemple les questions 5) ou 10).

Finalement, il ressort que les compétences des candidats en analyse ont été globalement moins décevantes que l'année dernière, mais de sérieuses lacunes subsistent concernant les variables aléatoires continues à densité. Un certain nombre de points fondamentaux (raisonnement, manipulation d'inégalités) se sont également avérés mal maîtrisés par les candidats. Comme l'année dernière, nous insistons sur le fait que l'épreuve de mathématiques du concours porte sur le programme des *deux années* de classes préparatoires.