Epreuve écrite de mathématique MPI2

ENS : Paris - Lyon - Cachan
Durée : 4 heures
Coefficients : PARIS 4 LYON 4 CACHAN 5
Membres du jury : J-F. Aujol, K. Beauchard, J-C. Sikorav, G. Vial

Le sujet portait cette année sur des problèmes d'optimisation inspirés de modèles actuellement développés en traitement d'images. L'épreuve comportait cinq parties. La première partie visait à permettre aux candidats de démontrer les résultats d'optimisation relatifs aux fonctions convexes dont ils avaient besoin par la suite. Les parties 2 à 5 s'intéressaient à différents choix de régularisation par ordre croissant de difficulté. Le sujet était long, mais cet aspect était pris en compte dans le barème, les notes s'étalant de 0 à 20, avec une moyenne proche de 9.

Quelques commentaires plus spécifiques sur les deux premières parties (les autres parties ont été traitées de manière trop éparse) :

Partie I : D'une manière générale, les fonctions de plusieurs variables sont assez mal maîtrisées.

- I.1.a Bien que très classique, cette question a souvent donné lieu à des réponses surprenantes. Dans de nombreuses copies, une fonction continue minorée admet forcément un minimum. Plusieurs candidats pensent que $\mathbb{R}^N$ est compact.
- I.1.b Pourquoi chercher un contre-exemple en dimension N>1, souvent faux ?
- I.2.a Plusieurs candidats ont dérivé des inégalités.
- I.2.b Vu dans beaucoup de copies : ∇ *est linéaire, donc* $\nabla(F(u+t(v-u)) = (1-t)\nabla F(u) + t\nabla F(v) \ldots$
- I.3 Nombreux passages à la limite dans des inégalités strictes.
- I.5.b Le calcul de $\phi'(t)$ n'a que très rarement été correct.

Partie II :

- II.1 Le calcul du gradient a souvent été laborieux. Il ne s'agissait pourtant que d'une fonction quadratique. Le calcul de la Hessienne a souvent été fantaisiste.
- II.2 Il ne suffit pas à une matrice symétrique d'avoir ses coefficients diagonaux strictement positifs pour être définie positive.
- II.2 Beaucoup de candidats utilisent l'inégalité triangulaire sur la norme au carré.

II.6 De trop nombreux candidats ont proposé le raisonnement suivant : (u_n) *bornée, et* $u_{n+1} - u_n \to 0$*, alors* u_n *converge* ...

II.6 Un autre variante classique proposée par les candidats a été : $\sum |u_{n+1} - u_n|^2$ *converge, donc* $\sum |u_{n+1} - u_n|$ *converge* ....