Rapport sur l'oral de mathématiques 2009

Oral spécifique E.N.S. Paris : Thomas Duquesne
Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Romain Abraham, Sorin Dumitrescu, Philippe Gille.

1 Remarques générales sur la session 2009

Le jury de l'oral spécifique Ulm a noté l'excellent niveau général des candidats : cela est d'autant plus remarquable que le nombre d'heures de cours en mathématiques ne cesse de baisser dans l'enseignement secondaire alors que les programmes des classes préparatoires se maintiennent globalement dans leur étendue,

2 Commentaires d'ensemble

Les recommandations des années passées sont reconduites. Le jury espère qu'elles finiront par être prises en compte.

• Il est bon de s'écarter régulièrement du tableau pour laisser l'examinateur voir ce qu'on y a écrit.

• Inutile d'effacer sans arrêt ce qu'on écrit, avant même de savoir si ce sera utile ou non : le tableau est grand.

• Il faut trouver un juste équilibre entre un mutisme total et un flot de paroles ininterrompu (comment peut-on réfléchir dans ces conditions ?). Le jury apprécie de savoir où en est le candidat de ses réflexions, mais il n'est pas sûr qu'il soit dans l'intérêt du candidat de raconter tout ce qui lui passe par la tête. Il ne faut par ailleurs pas être surpris de voir l'examinateur quitter la salle quelques minutes en début d'épreuve pour laisser justement au candidat un temps de réflexion.

• L'examinateur ne cherche *jamais* à induire en erreur le candidat. Lorsque le candidat se trompe ou commet une bourde, il lui est toujours donné une occasion de se rattrapper ou de se corriger.

3 Commentaires mathématiques de détail

Bien que les exercices donnés aux oraux des ENS soient difficiles, il est nécessaire que les candidats sachent se débrouiller honorablement des questions simples ou peu techniques que le jury est amené (immanquablement) à leur poser ; nous ne dirons jamais assez qu'il faut maîtriser son cours.

Malgré l'excellent niveau général, on peut toutefois regretter que des calculs élémentaires avec des nombres complexes ou avec des parties entières se révèlent délicats pour nombre de candidats. La manipulation d'inégalités et de valeurs absolues est également souvent peu rigoureuse. Le raisonnement par l'absurde est souvent utilisé en première approche et de façon un peu abusive. De nombreux candidats affirment procéder par "analyse-synthèse", ce qui peut être en effet une démarche efficace pour progresser dans la solution, mais ils doivent alors éviter les embrouillaminis logiques et tenir rigoureusement le fil de leur argumentation.

De manière générale, les exercices d'analyse posent beaucoup de problèmes aux candidats qui ont du mal à majorer de manière adéquate les quantités apparues et pensent rarement à séparer l'expression obtenue en plusieurs termes afin de majorer chaque terme séparément. Le domaine de validité du théorème des accroissements finis n'est pas connu de nombreux candidats. Tous les candidats connaissent bien sûr le théorème de Rolle, mais ils ne pensent pas toujours à l'appliquer. Il serait bon ensuite que les candidats puissent citer correctement le Théorème de Cauchy-Lipschitz lorsqu'ils l'invoquent (sans que, la plupart du temps, cela soit nécessaire).

En algèbre linéaire, la réduction des endomorphismes n'est connue qu'en en surface et reste souvent mal maîtrisée. Certains expliquent qu'« une matrice complexe est trigonalisable et que, par conséquent, elle possède une valeur propre ». La démonstration de ce fait est d'ailleurs parfois mal connue : nul besoin d'utiliser les espaces caractéristiques (qui ne sont pas au programme). Signalons un recours trop systématique, et souvent peu pertinent, au polynôme minimal, qui est une notion hors programme.

Les débordements du programme de certaines classes préparatoires ne rendent pas service à tous les candidats ! Certains croient se "souvenir", paralysant leur capacité d'analyse ; d'autres recrachent des notions mal assimilées, ralentissant considérablement le déroulement de l'oral. Signalons encore que les raisonnements "par densité" en algèbre linéaire conduisent parfois à des contresens.

Mentionnons enfin que, pour trouver une condition nécessaire et suffisante, obtenir après quelques manipulations aléatoires un certain nombre de conditions nécessaires et espérer ensuite qu'elles seront suffisantes ne constitue pas une démarche satisfaisante (et échoue la plupart du temps).

4 Quelques exercices posés à l'oral spécifique Ulm

• **Exercice I.** On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|$ et on pose $K = \{f \in E \ : \ f(0) = 0 \text{ et } |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \,,\ x, y \in [0,1]\}$. Pour tout $\delta > 0$ on note $N(K, \delta)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon δ nécessaires pour recouvrir K. Estimer $\log\log N(K,\delta)$ lorsque δ tend vers 0.

• **Exercice II.** On note E_1 l'espace vectoriel des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui sont 1-périodiques. On définit $T : E_1 \to E_1$ par $Tf(x) = f(x + 2^{1/3}) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Trouver le noyau et l'image de l'endomorphisme T.

• **Exercice III.** Question préliminaire : soit une matrice réelle carrée de taille n dont les vecteurs colonnes sont notés $X_1, \ldots X_n$. En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, montrer que

$$|\det(X_1, \ldots, X_n)| \leq \prod_{1 \leq j \leq n} \|X_j\| \,,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne.

Soit $\theta \in]1, \infty[$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} \sin^2(\pi\lambda\theta^n)$ converge.

a) Pour tout $n \geq 0$, on note $a_n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda\theta^n = a_n + \eta_n$ avec $|\eta_n| \leq 1/2$. On note $B_n = (a_{i+j}\,;\, 0 \leq i, j \leq n) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout n suffisamment grand $\det(B_n) = 0$.

b) Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ dans un voisinage de l'origine, on ait

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad Q(0) = 1 \ .$$

c) Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $R(\theta) = 0$ et tel que toute autre de ses racines est de module strictement plus petit que 1.

• **Exercice IV.** On note Imp $= 2\mathbb{N} + 1$, l'ensemble des nombres impairs positifs.

a) Pour tout $p \in$ Imp, montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes.

- (i) Pour tout $\ell \in$ Imp tel que $1 \leq \ell < p$, on a $a_1^\ell + \ldots + a_p^\ell = 0$;
- (ii) $a_1^p + \ldots + a_p^p > 0$.

b) Soit $D \subset$ Imp un ensemble non-vide et distinct de Imp. Montrer qu'il existe une suite de réels $(c_n, n \geq 1)$ qui satisfait les conditions suivantes.

- Si $\ell \in D$, la série $\sum_{n \geq 1} c_n^\ell$ diverge (c'est-à-dire ne converge pas vers un nombre réel).
- Si $\ell \in \mathrm{Imp} \backslash D$, la série $\sum_{n \geq 1} c_n^\ell$ converge.

• **Exercice V.** Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe une constante $k \in [0, 2[$ telle que

$$\forall M \in G \ , \quad \|M - \mathrm{Id}\| < k \ ,$$

où $\|A\| = \max\{|A.x| \ : \ |x| = 1\}$ avec $|\cdot|$ norme Hermitienne de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall M \in G \ , \quad M^m = \mathrm{Id} \ .$$

• **Exercice VI.** Soit N, un entier plus grand que 2. On note E_N le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$, qui sont N-périodiques en chaque coordonnée. On définit l'endomorphisme D sur E_N par

$$Du(p, q) = 4u(p, q) - u(p + 1, q) - u(p - 1, q) - u(p, q + 1) - u(p, q - 1)$$

pour tout $u \in E_N$ et tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. On note P_N le polynôme caractéristique de D. Donner un équivalent de $\log(-P'_N(0)\,)$ lorsque N tend vers l'infini.

Quelques petites questions, plus simples, posées en fin d'oral.

• A quelle(s) condition(s) une suite réelle peut être réindexée de façon à être monotone à partir d'un certain rang ?

• Soit p un nombre premier. Combien y-a-t-il de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

• Est-ce que le groupe $(\mathbb{Q},+)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z},+)$?

5 Quelques exercices posés à l'oral commun Ulm-Lyon-Cachan

• Trouver toutes les matrices carrées A à coefficients complexes vérifiant $A + {}^tCom(A) = 0$.

• Soit p un nombre premier plus grand que 3.

1. Montrer que $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $p = 4k+1$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & M & \longmapsto & Tr(AM) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \psi_A : & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Montrer que $A \longmapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})^*$.
2. Montrer que si A est nilpotente, $Ker(\psi_A) \subset Ker(\varphi_A)$.
3. Montrer que A est nilpotente ssi il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = BA - AB$.
4. Montrer que A est nilpotente ssi A et $2A$ sont semblables.

• Soit t un nombre réel non nul. Montrer que la suite

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1-it}$$

est bornée.

- Soit $V = \mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$ muni de la norme euclidienne standard.

1. Soit $f : V \to V$ une fonction 1-Lipschitzienne. On note $\Omega \subset V$ l'ensemble des points $v \in V$ tels que la suite $(f^n(v))_{n \geq 0}$ est bornée. Montrer que $\Omega = \emptyset$ ou $\Omega = V$.
2. En voyant $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, étudier le cas d'une transformation $z \to az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$.
3. Etudier le cas d'une transformation affine $v \to A.v + b$ de $\mathbb{R}^d$ où $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$.

- Soient A, B deux matrices réelles de taille $n \times n$ telles que $|||A - Id||| \leq \alpha < 1$ and $|||B - Id||| \leq \beta < 1$, avec α, β des nombres réels et $||| \cdot |||$ une norme multiplicative (i.e. $|||MN||| \leq |||M||||||N|||$, quelque soient les matrices M, N).

(i) Montrer que A est inversible et que $|||A^{-1}||| \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

(ii) Montrer que $|||ABA^{-1}B^{-1} - Id||| \leq \frac{2\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}$.

(iii) Si α et β sont suffisamment petits, montrer que $|||ABA^{-1}B^{-1} - Id||| \leq |||A - Id|||$.

(iv) Considérons toujours α and β suffisamments petits. Supposons que le groupe engendré par A et B est discret (dans $GL(n, \mathbf{R})$). Montrer que ce groupe contient un élément différent de l'identité qui commute avec tous les autres.

- Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels scindé sur $\mathbf{R}$. Montrer l'inégalité

$$(n-1)(P'(x))^2 \geq nP(x)P''(x),$$

pour tous les réels x. Caractériser le cas d'égalité.

- Soient A, B, C trois matrices réelles de taille $(2, 2)$ et de déteminant égal à 1. Si A et B commutent avec C et $C \neq \pm Id$, montrer que A et B commutent.

- Soit $SL(2, \mathbf{C})$ le groupe des matrices complexes de taille $(2, 2)$ et de déterminant égal à 1.

(i) Montrer que l'on a $A + A^{-1} = Tr(A)I_2$, quelque soit $A \in SL(2, \mathbf{C})$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbf{Z}[X]$, tel que l'on ait $Tr(A^n) = P_n(Tr(A))$, pour toute matrice A dans $SL(2, \mathbf{C})$.

(iii) Montrer que pour tous les $m, n \in \mathbf{Z}$ il existe un polynôme $P_{m,n} \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$ tel que la relation $Tr(A^m B^n) = P_{m,n}(Tr(A), Tr(B), Tr(AB))$, soit vraie pour toutes les matrices $A, B \in SL(2, \mathbf{C})$.

Dans cet exercice Tr désigne la trace.

• Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pour lesquelles il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^{\circ n}(x) = -x$.

On rappelle que $f^{\circ n}$ est la fonction obtenue en composant f avec elle-même n-fois.

• Soient $f : [a, b] \to [a, b]$ et $g : [a, b] \to [a, b]$ deux fonctions continues telles que

$$f \circ g = g \circ f$$

ici a et b étant deux nombres réels.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

• Soit A une matrice complexe de taille (k, k) telle que la suite $Tr(A^n)$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini (ici Tr désinge la trace).

Montrer que le spectre de A est inclus dans le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$.