10.27B

SESSION 2010

Filière BCPST

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrice est interdit.

Ce sujet porte sur l'émergence de formes, dites "structures de Turing", utilisées en morphogénèse (développement de la forme des organismes).

Les structures de Turing sont le résultat d'une *instabilité* dans un système de *réaction-diffusion.* Les systèmes de réaction-diffusion décrivent l'évolution de mélanges d'espèces chimiques soumises à des réactions chimiques et à de la diffusion. La première partie de ce sujet est consacrée à l'étude de la diffusion. La seconde partie étudie la stabilité des équilibres d'une équation de réaction-diffusion. La troisième partie établit un résultat pour des systèmes d'équations différentielles. La quatrième partie étudie la stabilité des équilibres d'un système d'équations de réaction-diffusion.

Il est recommandé de parcourir le sujet dans son intégralité avant de commencer. Toutes les équations numérotées sont susceptibles d'être utilisées à un stade ultérieur du sujet. Enfin, il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Notations

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, celui des nombres réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des vecteurs de dimension deux à cœfficients réels est noté $\mathbb{R}^2$ et celui des matrices carrées de dimension deux à cœfficients réels est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De même, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}^2$ celui des vecteurs de dimension deux à cœfficients complexes.

Pour un vecteur $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $||X||$ désigne la norme euclidienne de X : $||X|| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

Pour deux vecteurs $U_1 \in \mathbb{R}^2$ et $U_2 \in \mathbb{R}^2$, on notera $P = (U_1|U_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dont la première colonne est U_1 et la deuxième colonne est U_2.

Pour une fonction de deux variables $u(t,x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à t, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ désigne sa dérivée partielle par rapport à x, et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ désigne sa dérivée partielle seconde par rapport à x.

Pour une fonction d'une seule variable $u(t)$, $\dfrac{du}{dt}(t)$ désigne la dérivée de u par rapport à t.

Pour $L > 0$, $\mathcal{C}^2([0,L])$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur $[0,L]$ dont la dérivée seconde existe et est continue.

Enfin, on notera S l'ensemble des fonctions $u : [0,\infty[\times[0,L] \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$ continues sur $[0,\infty[\times[0,L]$, telles que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ existe et soit continue sur $[0,\infty[\times[0,L]$ et telles que $\forall t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto u(t,x) \in \mathcal{C}^2([0,L])$.

1 La diffusion

L'équation de la diffusion sur le domaine monodimentionnel $[0,L]$ est :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \tag{1.1}$$

où

- $u(t,x) \in \mathbb{R}$ est la quantité qui diffuse,
- $t \in [0,+\infty[$ est le temps,
- $x \in [0,L]$ est l'espace,
- $d \in [0,+\infty[$ est un cœfficient décrivant la vitesse de diffusion.

Cette équation est complétée par des *conditions aux bords* :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \tag{1.2}$$

et par une condition initiale $u(0,x)$ donnée. On admettra que si $x \mapsto u(0,x) \in \mathcal{C}^2([0,L])$, les solutions de (1.1) avec conditions aux bords (1.2) sont dans l'ensemble S défini dans la partie **Notations**.

La notion fondamentale pour l'étude de l'émergence de formes est celle de *fonction propre* : On dira que la fonction $w(x)$ est une fonction propre de $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur $[0,L]$ avec conditions aux bords (1.2) si w n'est pas identiquement nulle, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,L]$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) = \lambda w(x)$ et si w vérifie les conditions (1.2). On dit alors que λ est la valeur propre associée à $w(x)$.

1. Vérifier que les $\cos(n\pi x/L)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions propres de $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur $[0,L]$ avec conditions aux bords (1.2) et calculer les valeurs propres associées.

2. On suppose que la condition initiale de l'équation (1.1) est une de ces fonctions propres, $u(0,x) = \cos(n_0\pi x/L)$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On cherche alors une solution de (1.1) avec conditions aux bords (1.2) sous la forme $u(t,x) = \alpha(t)\cos(n_0\pi x/L)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$ et calculer $\alpha(t)$. Pour tout $x \in [0,L]$, calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$.

3. On admettra le résultat suivant :

   Si $u : [0,\infty[\times[0,L] \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est continue sur $[0,\infty[\times[0,L]$ et telle que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ soit continue sur $[0,\infty[\times[0,L]$, alors $t \mapsto \displaystyle\int_0^L u(t,x)dx$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^L u(t,x)dx = \int_0^L \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx$.

   Montrer l'unicité dans S des solutions de l'équation (1.1) avec conditions aux bords (1.2), pour une condition initiale $u(0,x) \in \mathcal{C}^2([0,L])$ donnée. (Pour cela, on supposera qu'il existe dans S deux solutions u et v de (1.1), (1.2) avec cette condition initiale et on étudiera $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^L \Big(u(t,x) - v(t,x)\Big)^2 dx$).

4. On suppose que la condition initiale de (1.1) est une combinaison linéaire des $N+1$ premières fonctions propres de la question 1, avec $N \in \mathbb{N}^*$:

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos(n\pi x/L), \tag{1.3}$$

   où $\alpha_n \in \mathbb{R}$ pour $n = 0, \ldots, N$.

   Montrer que l'équation (1.1) avec conditions aux bords (1.2) et condition initiale (1.3) admet une solution $u \in S$ que l'on calculera. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$ pour tout $x \in [0,L]$.

5. On dit que la diffusion “lisse” les conditions initiales, et lisse plus vite les hautes fréquences. Expliquer brièvement pourquoi cette affirmation est illustrée par le résultat précédent.

2 Une équation de réaction-diffusion

On considère maintenant l’équation de *réaction-diffusion* sur $[0, L]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x)) + d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \tag{2.4}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction décrivant le bilan entre la création et la destruction de u dues aux réactions chimiques (ces réactions sont supposées catalysées par u et c’est la raison pour laquelle f dépend de u). Les autres termes de l’équation (2.4) sont définis comme pour l’équation (1.1). L’équation (2.4) est complétée par les conditions aux bords (1.2) et par une condition initiale. On admettra que si la condition initiale $u(0,x) \in \mathcal{C}^2([0,L])$, les solutions de (2.4), (1.2), lorsqu’elles existent pour tout $t \in [0, +\infty[$, sont dans l’ensemble S défini dans la partie **Notations**.

- On dit que $u_0 \in \mathbb{R}$ est un *équilibre de la réaction* si $f(u_0) = 0$.
- On dira qu’un équilibre de la réaction u_0 est *asymptotiquement stable par rapport aux perturbations de la forme* $u_p(x)$ pour l’équation (2.4) si, lorsque la condition initiale est $u(0,x) = u_0 + u_p(x)$, la solution de (2.4) vérifie $\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = u_0$ pour tout $x \in [0, L]$.

1. On suppose pour commencer que $d = 0$. Soit u_0 un équilibre de la réaction. On suppose que f est dérivable en u_0. Soit $x_0 \in [0, L]$ fixé.
   (a) Etude linéaire :
   On suppose que la condition initiale de l’équation (2.4) vérifie $u(0,x_0) = u_0 + u_p(x_0)$ où la perturbation $u_p(x_0)$ est supposée *petite*. On pose $\bar{u}(t) = u(t,x_0) - u_0$. Expliquer brièvement pourquoi, tant que $\bar{u}(t)$ est assez petit, sa dynamique peut être décrite de façon approchée par
   $$\frac{d\bar{u}}{dt}(t) = f'(u_0)\ \bar{u}(t), \tag{2.5}$$
   avec une condition initiale que l’on précisera. Calculer alors $\bar{u}(t)$, solution de l’équation (2.5) avec cette condition initiale. Donner la condition sur $f'(u_0)$ pour que u_0 soit asymptotiquement stable par rapport à toutes les perturbations suffisamment petites, d’après l’équation (2.5).
   (b) Etude non-linéaire :
   On suppose que $f'(u_0) < 0$.
   i. Montrer qu’il existe $\eta > 0$ tel que $\forall u \in [u_0 - \eta, u_0 + \eta]$,
   $(u - u_0)f(u) \le (u - u_0)^2 f'(u_0)/2$.

ii. On suppose que la condition initiale de l'équation (2.4) vérifie $u(0, x_0) \in]u_0 - \eta, u_0 + \eta[$.
Soit t^* le premier instant (fini ou infini) tel que $u(t^*, x_0) = u_0 + \eta$ ou $u(t^*, x_0) = u_0 - \eta$. En supposant t^* fini et en étudiant les signes de $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t^*, x_0)$ et $f(u(t^*, x_0))$, obtenir une contradiction.

iii. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$, où $v(t) = \big(u(t, x_0) - u_0\big)^2$. (On pourra utiliser le changement de variable $v(t) = \lambda(t) e^{f'(u_0)t}$).
Conclure sur la stabilité asymptotique de u_0.

2. On suppose maintenant que $d > 0$. Soit u_0 un équilibre de la réaction tel que $f'(u_0)$ existe et $f'(u_0) < 0$.

(a) Etude linéaire :
Montrer brièvement que tant que $\bar{u}(t, x) = u(t, x) - u_0$ est assez petit, son évolution peut être décrite de façon approchée par

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t, x) = f'(u_0)\ \bar{u}(t, x) + d \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(t, x). \tag{2.6}$$

Montrer que u_0 est asymptotiquement stable par rapport à toutes les perturbations de la forme $\alpha_0 \cos(n\pi x/L)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et α_0 suffisamment petit, d'après l'équation (2.6).

(b) Etude non-linéaire :
On suppose que la condition initiale de (2.4) vérifie $u(0, x) \in]u_0 - \eta, u_0 + \eta[$ pour tout $x \in [0, L]$ où η est défini à la question 1b partie 2.
Soit t^* le premier instant (fini ou infini) tel que $\sup\limits_{x \in [0,L]} u(t^*, x) = u_0 + \eta$ ou $\inf\limits_{x \in [0,L]} u(t^*, x) = u_0 - \eta$. Montrer que t^* est infini.
En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 0$, où $V(t) = \displaystyle\int_0^L \Big(u(t, x) - u_0\Big)^2 dx$.

3 Systèmes d'équations différentielles

Le but de cette partie est d'étudier le système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dX}{dt}(t) = M\ X(t) \tag{3.7}$$

où $X(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et M une matrice carrée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et d'étudier les conditions sous lesquelles $\lim\limits_{t \to +\infty} ||X(t)|| = 0$.

1. On considère d'abord le cas où M a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2. Soient U_1 un vecteur propre de M associé à λ_1 et U_2 un vecteur propre de M associé à λ_2. On considère la matrice $P = (U_1|U_2)$.

   (a) Montrer que P est inversible et que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

   (b) On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ où $X(t)$ est solution du système (3.7) avec condition initiale $X(0)$ donnée. Montrer que $Y(t)$ est solution d'un système d'équations différentielles que l'on précisera et calculer $Y(t)$.

   (c) Montrer que
   $\left(\forall Y(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = 0\right) \Longleftrightarrow (\lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0) \Longleftrightarrow$
   $\left(\forall X(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} ||X(t)|| = 0\right)$,
   où $X(t)$ et $Y(t)$ sont définis à la question précédente.

2. On considère ensuite le cas où M a une seule valeur propre λ_1, réelle, et de multiplicité 2. Soit U_1 un vecteur propre de M associé à λ_1.

   (a) Montrer qu'on peut construire une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que
   $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors on a forcément $c = \lambda_1$ (on montrera que c est valeur propre de M).

   (b) Déduire de la question précédente que
   $\left(\forall X(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0\right) \Longleftrightarrow \lambda_1 < 0.$

3. On considère enfin le cas où M a deux valeurs propres complexes conjuguées $a + ib$ et $a - ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit U un vecteur propre de M associé à $a + ib$. U est un vecteur de $\mathbb{C}^2$: $U = U_1 + iU_2$ où $U_1 \in \mathbb{R}^2$ et $U_2 \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que U_1 et U_2 sont linéairement indépendants.

   (b) On pose $P = (U_1|U_2)$. Montrer que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   (c) On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ où $X(t)$ est solution du système (3.7) avec condition initiale $X(0)$ donnée. Soient $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées polaires de $Y(t)$:
   $Y(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) \\ r(t)\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$.
   En calculant $r^2(t)$ et $\tan(\theta(t))$ en fonction des coordonnées de $Y(t)$, montrer que $\frac{dr}{dt}(t) = a\ r(t)$ et $\frac{d\theta}{dt}(t) = -b$.
   En déduire que $\left(\forall X(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = 0\right) \Longleftrightarrow a < 0.$

4. Déduire des questions précédentes que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la solution $X(t)$ du système (3.7) avec condition initiale $X(0)$ donnée vérifie
$\Big(\forall X(0) \in \mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} ||X(t)|| = 0\Big) \iff \Big(\mathrm{tr}(M) < 0 \text{ et } \det(M) > 0\Big)$.

4 Système de réaction-diffusion

Le but de cette partie est de montrer que pour certains systèmes de réaction-diffusion, la diffusion peut *déstabiliser* l'équilibre de la réaction. Les perturbations de la forme de certaines fonctions propres de $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sont alors amplifiées. Ces perturbations, une fois amplifiées, sont appelées *structures de Turing.*

On considère le système de réaction-diffusion sur $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{u^2(t,x)}{v(t,x)} - u(t,x) + d_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = u^2(t,x) - 2v(t,x) + d_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \end{cases} \tag{4.8}$$

où $d_u \in [0,+\infty[$ et $d_v \in [0,+\infty[$ sont les cœfficients de diffusion de u et de v respectivement.

Ce système est complété par les conditions aux bords :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,\pi) = 0,$$

et par des conditions initiales $u(0,x)$ et $v(0,x)$ données pour $x \in [0,\pi]$.

- De façon analogue à la partie 2, on dit que $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est un équilibre de la réaction du système (4.8) si $\begin{cases} \dfrac{u_0^2}{v_0} - u_0 = 0, \\ \\ u_0^2 - 2v_0 = 0. \end{cases}$
- On dira qu'un équilibre $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ de la réaction de (4.8) est asymptotiquement stable par rapport aux perturbations de la forme $\begin{pmatrix} u_p(x) \\ v_p(x) \end{pmatrix}$ pour (4.8) si, lorsque la condition initiale est $u(0,x) = u_0 + u_p(x)$ et $v(0,x) = v_0 + v_p(x)$, la solution de (4.8) vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = u_0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t,x) = v_0$ pour tout $x \in [0,\pi]$.

1. Déterminer les équilibres de la réaction de (4.8).

   Dans toute la suite, on supposera que la condition initiale de (4.8) est $u(0,x) = u_0 + u_p(x)$, $v(0,x) = v_0 + v_p(x)$ où $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est un équilibre de la réaction de (4.8) et $u_p(x)$, $v_p(x)$ sont des petites perturbations, et on posera $\bar{u}(t,x) = u(t,x) - u_0$ et $\bar{v}(t,x) = v(t,x) - v_0$.

   (a) On suppose pour commencer que $d_u = d_v = 0$.

   Montrer que tant que $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont assez petits, leur évolution peut être décrite de façon approchée par le système

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}(t,x) = J \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}(t,x), \tag{4.9}$$

   où $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est asymptotiquement stable par rapport à toutes les perturbations suffisamment petites, d'après le système (4.9).

2. On suppose maintenant que $d_u = 1/10$ et $d_v > 0$. Déterminer le système linéaire décrivant de façon approchée l'évolution de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ si ces derniers sont suffisamment petits.

   Montrer que d'après ce système, si $d_v = 1/10$, l'équilibre de la réaction de (4.8) est asymptotiquement stable par rapport à toutes les perturbations de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(nx) \\ \beta_0 \cos(nx) \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et α_0 et β_0 suffisamment petits.

   Montrer que d'après ce système, si $d_v = 12/10$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel l'équilibre de la réaction de (4.8) *n'est pas* asymptotiquement stable par rapport aux perturbations de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(n_0 x) \\ \beta_0 \cos(n_0 x) \end{pmatrix}$, même avec α_0 et β_0 petits. Déterminer n_0.

3. Refaire l'étude de la question précédente en supposant que le système (4.8) est posé sur $[0, 2\pi]$ au lieu de $[0, \pi]$. Lorsque $d_v = 12/10$, peut-on encore trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel l'équilibre de la réaction de (4.8) n'est pas asymptotiquement stable par rapport aux perturbations de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(n_0 x) \\ \beta_0 \cos(n_0 x) \end{pmatrix}$? Refaire la même étude sur $[0, \pi/4]$.

Fin de l'épreuve.

FIN DE L'EPREUVE.