ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

ENS CACHAN

Durée : 45 minutes   Coefficient : 12

Membres du jury : J.-F. AUJOL, K. BEAUCHARD, G. VIAL

Cette épreuve, d'une durée de 45 minutes, se déroule sans préparation. Le jury cherche à vérifier l'acquisition des connaissances au programme, et surtout à mesurer la capacité de réaction face à un problème le plus souvent nouveau et original. Rappelons que l'ENS de Cachan prépare aux métiers d'enseignant, d'enseignant-chercheur, de chercheur, d'ingénieur...

Dans leur majorité, les candidats admissibles ont acquis les notions principales du programme des classes préparatoires, et sont à l'aise avec les objets et théorèmes qu'ils doivent manipuler. Ils calculent généralement bien et ont les bons réflexes devant des situations standards, témoignant d'une bonne préparation par leurs professeurs. La réactivité devant un problème nouveau est plus inégale, certains candidats n'osant pas "attaquer" le problème, d'autres tentant de susciter une indication du jury dès les premières minutes de l'oral. Rappelons qu'il n'est pas nécessairement demandé de résoudre complètement l'exercice proposé. Une résolution dans un cas particulier, ou sous une hypothèse supplémentaire, est très appréciée : une discussion s'ensuit alors généralement avec le jury pour voir comment s'adapte (ou ne s'adapte pas) la démonstration dans le cas général. Enfin, le jury est sensible à la clarté et la pertinence des arguments donnés par les candidats, qu'ils soient écrits ou oraux (les hypothèses de théorèmes utilisés doivent, en particulier, apparaître clairement).
Les notes s'échelonnent de 3 à 20 ; l'étalement reflète la volonté d'utiliser la grille entière plutôt qu'un jugement absolu sur la valeur intrinsèque des candidats.

Ci-dessous, quelques remarques plus précises :

- le jury a été surpris par la difficulté qu'a posé la question (préliminaire) suivante : montrer que la fonction $x \mapsto \sin x/x$, prolongée par continuité en 0, est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et a toutes ses dérivées bornées sur $\mathbb{R}$. À cette occasion (mais aussi pour le prolongement de solutions d'un problème de Cauchy), le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (ou *théorème de la limite de la dérivée*) a été malmené...
- Beaucoup de candidats ont eu du mal à montrer que l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet (une norme ayant été fixée),
- Les candidats ont des difficultés à trouver des contre-exemples (équation différentielle où l'existence n'est pas globale, fonction non lipschitzienne sur $[0, 1]$, fonction dont la série de Fourier n'est pas sommable).
- Les problèmes de point fixe en dimension 1 ne sont pas clairs pour tous les candidats, qu'il s'agisse d'une application du théorème des valeurs intermédiaires (f décroissante continue sur $\mathbb{R}$, par exemple) ou de l'étude de la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, pour laquelle les dessins laissent parfois perplexes.
- Des progrès ont étés observés concernant l'application des théorèmes de Cauchy-Lipschitz. Toutefois, les fonctions de plusieurs variables, l'optimisation et la convexité sont des notions peu maîtrisées (même pour les aspects les plus élémentaires). Par exemple, plusieurs candidats ont affirmé qu'une suite minimisante était nécessairement convergente, ou ne connaissent pas les caractérisations de la convexité en dimension 1.