

Rapport du jury de l'épreuve orale de mathématiques - Filière PC - Concours 2010

Damien Gayet, Emmanuel Grenier, Jean-Claude Sikorav, Abdelghani Zeghib

September 3, 2010

Introduction

Nombre de candidats ***, nombre de présents ***, moyenne 11,43, écart-type 3,49.

Les candidats. Dans l'ensemble, il est réjouissant de constater que les candidats étaient animés d'un désir réel de résoudre les problèmes qui leur ont été posés. Certains ont su avancer des idées et des intuitions, développer des calculs proprement et sans trop se tromper, tester leurs idées sur des cas plus simples, appliquer les théorèmes en vérifiant si leur hypothèses étaient bien réalisées par la situation, se corriger spontanément quand ils faisaient une erreur. Ceux-là ont tous bénéficié d'une excellente note, mais il faut avouer qu'ils étaient plutôt rares.

A la question *êtes-vous certain(e) de votre inégalité ?*, la réponse *oui !* sans réflexion n'encourage pas l'examineur à la clémence, mais la réponse *non !* et la rédaction tout aussi prompte d'une inégalité tout aussi fausse amène immédiatement la même question de la part de l'examineur. Nous encourageons donc les candidats, d'une part supposer *a priori* que les doutes des examinateurs sont parfois légitimes, d'autre part à prendre le temps de comprendre où la faute se situe, le cas échéant.

Par ailleurs, les examinateurs voudraient rassurer les candidats : ceux-là ne sombrent pas dans l'angoisse et la suspicion quand ceux-ci s'abstiennent de parler ou d'écrire pendant plus de quinze secondes. Trop de candidats semblent penser qu'ils doivent résoudre l'exercice dans la minute qui suit, et que l'examineur attend d'eux un flot continu de paroles et d'écriture. De plus, le candidat n'est pas tenu de tout écrire : un argument simple et clair contente souvent l'examineur. Par exemple, dire qu'on a affaire à une composition de fonctions continues peut épargner à tout le monde d'interminables lignes de calculs.

Quelques candidats estiment de leur ressort de minimiser leurs erreurs, de laisser entendre que les questions qu'on leur adresse n'ont pas de sens, ou qu'ils ont réellement démontré le résultat malgré les questions supplémentaires de l'examineur. A ceux-ci, nous conseillons un peu plus d'humilité et de travail. Enfin, quelques candidats oublient parfois qu'il convient d'utiliser un vocabulaire et un registre de langage adapté à la situation et la matière : les "trucs" sont souvent des égalités, et l'aveu de s'être "planté" dans un calcul ne dispense pas de le dire d'une autre façon.

Les exercices. Les exercices présentés (45 minutes, sans préparation) aux candidats ont couvert la totalité du programme. En particulier, les examinateurs n'ont pas hésité à puiser dans la géométrie. Très souvent, les problèmes évitaient les résolutions astucieuses, et sollicitaient plutôt une approche naturelle, appuyée sur des théorèmes fondamentaux du cours, des intuitions simples, et des calculs très souvent élémentaires. Par ailleurs les questions qui sortaient légèrement du lot traditionnel, ou formulées de façon un tout petit peu

originales étaient souvent soumises à la sagacité du candidat.

La base. Le programme rassemble un grand nombre de notions et de théorèmes profonds. Il serait souhaitable que chaque étudiant possède une batterie d'exemples et de contre-exemples élémentaires mais non triviaux (encore que...) et sache les appliquer à des situations très simples, ce qui leur permettrait de trouver rapidement une matrice non diagonalisable, une famille assez large de fonctions développables en série entière sur le plan complexe, une fonction positive, non nulle et d'intégrale pourtant nulle, etc. Pendant l'oral, la recherche d'un cas particulier ou d'un exemple ne doit pas être considérée comme un abandon ou un aveu de faiblesse. Par exemple, résoudre un problème de matrices d'abord pour les dimensions 1, 2 et 3 peut être particulièrement éclairant, ou supposer qu'une fonction converge avant d'aborder la situation plus générale où elle n'est que bornée. L'examinateur apprécie souvent cette démarche, et indiquera au candidat si le cas particulier lui semble de nature vraiment trop restrictive.

La logique. Les examinateurs ont été désagréablement surpris de constater que de très nombreux candidats estiment qu'ils ont démontré que P est équivalent à Q si P implique Q , qu'une fonction qui n'est pas bornée tend vers l'infini, qu'il suffit de dire "c'est la même chose" pour décrire un calcul vaguement analogue à un premier calcul, comme de passer du corps des complexes au corps des réels... D'autre part, l'assemblage aléatoire des connecteurs et quantificateurs logiques handicape gravement toute tentative de démonstration, en particulier concernant les problèmes de convergence. Par conséquent, une démonstration par l'absurde devient un périlleux exercice.

Les calculs. Le second point le plus préoccupant est la grande difficulté assez générale des candidats à mener à bien un calcul simple, difficulté associée et sans doute provoquée par un détachement et un laxisme incroyables. Les examinateurs aimeraient que les candidats prennent beaucoup plus au sérieux les calculs. Ils souhaiteraient par exemple que les étudiants distinguent spontanément une inégalité stricte et large, qu'ils réalisent qu'un nombre complexe n'est pas égal en général à son module, que le prix à payer pour une majoration est de passer aux valeurs absolues. Enfin, les examinateurs alertent sur le nombre invraisemblable de divisions sans précaution par un terme potentiellement nul. Par exemple, la quasi totalité des candidats démontrent avec candeur que pour tout entier naturel n , l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{int} dt$ est nulle.

Le cours. Le troisième point particulièrement faible concerne le cours. D'une part, un théorème est un énoncé précis, que l'étudiant se doit de connaître. D'autre part, ce théorème possède des hypothèses dont il faut vérifier systématiquement la validité dans la situation proposée. A titre d'exemples, les candidats ne savent que trop rarement dans quelle situation simple une fonction admet un maximum sur un ensemble donné, oublient que l'annulation de la différentielle en un point ne concerne que des fonctions qu'on peut dériver, et encore plus qu'elle n'est qu'une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local. Appeler à l'aide "les Règles de Domination" ne doit pas former une incantation magique, mais des conditions précises d'application d'un théorème.

Quelques erreurs récurrentes.

* Un difféomorphisme, avant de posséder des propriétés analytiques, est avant tout une bijection entre deux ensembles. Par ailleurs il ne suffit pas en général, de démontrer que l'image réciproque de 0 est 0 pour prouver qu'une application est injective... a fortiori

lorsque les ensembles en jeu n'ont aucune structure vectorielle !

* Le théorème de Cauchy-Lipschitz général est oublié au profit unique de sa version linéaire. Le monde physique étant de nature plutôt non linéaire, il est inquiétant que les candidats s'imaginent que toute solution est définie pour tout temps.

* Le développement de Taylor en deux variables à l'ordre 1 a posé des problèmes à de nombreux candidats, ce qui est vraiment anormal. La notion de différentielle est très floue, et gagnerait fortement à être mieux comprise.

* Le fait que deux sommes sont égales implique que les termes sont deux à deux égaux est une situation particulièrement exceptionnelle, si bien qu'il y a toujours une bonne raison à expliciter...

* Pour de futurs physiciens, cafouiller avec les indices n'est pas de bon augure.

* Trouver la distance à une droite ne devrait pas poser de problème sérieux.

* Quand une condition porte sur une matrice A , avant de supposer que A est trigonale, il convient de vérifier que la condition est stable par ce changement !