SESSION 2010

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche n'est pas autorisé.

Avertissement. On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision des démonstrations, ainsi qu'à la présentation des copies. La partie IV est indépendente de la partie III.

Notations.

Les ensembles des entiers naturels et des nombres réels sont notés respectivement $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Les nombres réels positifs ou nul forment l'ensemble $\mathbb{R}^+$. La norme et le produit scalaire de l'espace Euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ sont notés respectivement $\|\cdot\|$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pour $a \in \mathbb{R}^3$ et $r \geq 0$, la boule fermée de centre a et de rayon r est notée $B(a;r)$:

$$B(a;r) = \{y \in \mathbb{R}^3\,;\, \|y-a\| \leq r\}.$$

Si $j \in \{1,2,3\}$, on note $\pi_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application qui à x associe sa j-ième coordonnée x_j. On l'appelle la *projection sur le j-ième axe de coordonnées.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Si F est une partie de $\mathbb{R}^3$, le *diamètre* de F est défini par

$$\operatorname{diam}(F) = \sup\{\|y - x\| \,;\, x \in F,\ y \in F\}.$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on définit aussi $\mathrm{co}_p(F)$ comme l'ensemble des barycentres de p points quelconques de F à coefficients positifs : x appartient à $\mathrm{co}_p(F)$ si et seulement si il existe $x^1, \ldots, x^p \in F$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1, \qquad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x^j = x.$$

En particulier, $\mathrm{co}_1(F) = F$.

I. Préliminaires

1. Soit $F \subset \mathbb{R}^3$ et $1 \leq j \leq 3$. On suppose que $\mathrm{co}_2(F) = F$. Montrer que l'image de F par π_j est un intervalle, qu'on notera $\pi_j(F)$.

2. Si $F \subset \mathbb{R}^3$ et $1 \leq p \leq q$, montrer que

$$\mathrm{co}_p(F) \subset \mathrm{co}_q(F).$$

3. La réunion des $\mathrm{co}_p(F)$ lorsque p parcourt $\mathbb{N}^*$ est notée $\mathrm{co}(F)$. Montrer que

$$\mathrm{co}(\mathrm{co}(F)) = \mathrm{co}(F).$$

4. (a) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p$ des nombres réels non tous nuls. On suppose que

$$\sum_{j=0}^{p} \mu_j = 0.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel t tel que tous les $\lambda_j + t\mu_j$ sont positifs ou nuls, l'un au moins d'entre eux étant nul.

(b) En déduire que, si $F \subset \mathbb{R}^3$, on a $\mathrm{co}_5(F) = \mathrm{co}_4(F)$ (on admettra que 5 points $x^1, \ldots, x^5$ de $\mathbb{R}^3$ sont toujours affinement dépendants, ce qui signifie qu'il existe des nombres réels $\alpha_1, \ldots \alpha_5$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{5} \alpha_i x^i = 0).$$

(c) Montrer alors que $\mathrm{co}(F) = \mathrm{co}_4(F)$.

5. (a) Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}^3$ un point n'appartenant pas à K. Montrer qu'il existe un point $\hat{a}$ de K tel que $\|\hat{a} - a\| \leq \|v - a\|$ pour tout $v \in K$.

(b) On suppose de plus que $\mathrm{co}_2(K) = K$. Si $y \in K$, montrer que

$$\langle y - \hat{a}, \hat{a} - a \rangle \geq 0$$

(il est utile de s'aider d'un dessin, mais celui-ci ne constitue pas une démonstration).

(c) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\langle u, a \rangle < \inf\{\langle u, y \rangle \,;\, y \in K\}.$$

II. Un lemme technique

Dans cette partie, P est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^4$, incluse dans $\mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[$. Ses éléments sont des couples (a, r) où $a \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$. Pour tout nombre réel positif t, on note

$$Y_t = \bigcap_{(a,r) \in P} B(a; rt).$$

1. Montrer que la famille $(Y_t)_{t \geq 0}$ est croissante, c'est-à-dire que

$$(s < t) \Longrightarrow (Y_s \subset Y_t).$$

2. Montrer que chaque Y_t est compact.

3. Montrer que $\mathrm{co}_2(Y_t) = Y_t$, puis que $\pi_j(Y_t)$ est un intervalle compact.

4. Montrer qu'il existe T tel que Y_T soit non vide.

5. Soit $t \geq 0$ et $y, z \in Y_t$. Montrer que, pour tout $(a, r) \in P$,

$$\left\| \frac{y+z}{2} - a \right\|^2 + \left\| \frac{y-z}{2} \right\|^2 \leq r^2 t^2.$$

A partir de maintenant, on note c la borne inférieure des nombres $t \geq 0$ pour lesquels Y_t n'est pas vide.

6. Si $t > c$, montrer que

$$\mathrm{diam}(Y_t) \leq 2r_+ \sqrt{t^2 - c^2}\,,$$

où r_+ est le maximum de r parmi les couples $(a, r) \in P$.

7. Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, montrer que l'intersection des $\pi_j(Y_t)$ parmi les $t > c$ est un intervalle, réduit à un point, qu'on désignera par x_j.

8. Pour tout $t > c$, on choisit un élément y_t de Y_t. Montrer que y_t converge, lorsque $t \to c$, vers le vecteur x de coordonnées (x_1, x_2, x_3). En déduire que Y_c n'est pas vide. Montrer qu'il ne contient qu'un seul élément.

Dans la question ci-dessous, on note b l'unique élément de Y_c.

9. Soit u un vecteur unitaire de $I\!R^3$.

   (a) Pour tout $\epsilon \neq 0$, montrer qu'il existe $(a_\epsilon, r_\epsilon) \in P$ tel que
   $$\|b - a_\epsilon\| \leq r_\epsilon c < \| - \epsilon u + b - a_\epsilon\|.$$

   (b) On suppose ici que P est *fini.* Déduire de ce qui précède qu'il existe $(a, r) \in P$ tel que
   $$\langle u, b - a\rangle \leq 0, \qquad \|b - a\| = rc.$$

   (c) On définit l'ensemble, noté Q, des $a \in I\!R^3$ pour lesquels il existe r tel que $(a, r) \in P$ et $\|b - a\| = rc$.
   Montrer que b appartient à $\mathrm{co}(Q)$. *Indication* : on utilisera la question I.5.

III. Application : la boule circonscrite

Soit S une partie compacte non vide de $I\!R^3$.

1. Montrer qu'il existe une unique boule de rayon minimal contenant S. On pourra choisir $P = S \times \{1\}$ et appliquer les résultats du II. Cette boule est appelée la *boule circonscrite à* S.

2. On se donne un nombre $c \in I\!R^+$ et quatre points $x^0, \dots, x^3$ de $I\!R^3$ tels que $\|x^i\| = c$ pour tout i. Puis on choisit $R \in I\!R^+$ tel que $\|x^i - x^j\| \leq R$ pour tout i, j.
   Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in I\!R^+$. On suppose que
   $$\sum_{j=0}^{3} \lambda_j = 1, \qquad \sum_{j=0}^{3} \lambda_j x^j = 0.$$
   Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$,
   $$2c^2 \leq (1 - \lambda_k) R^2,$$
   et en déduire que
   $$c^2 \leq \frac{3}{8} R^2.$$

3. On suppose que S est *fini.* Montrer que le diamètre de la boule circonscrite à S est majoré par
   $$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{diam}(S).$$
   Indication : utiliser ce qui précède, ainsi que les questions I.4c et II.9.

4. Sur un exemple, montrer que le diamètre de la boule circonscrite à S peut être égal à cette valeur.

IV. Prolongement des applications lipschitziennes

Soit $m, n \geq 1$ deux nombres entiers. Etant donnée une partie S de $I\!R^3$ et une fonction $f : S \to I\!R^3$, on dit que (f, S) *est de classe* L si

$$\forall x, y \in I\!R^3, \quad (x \in S,\, y \in S) \Longrightarrow (\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\|),$$

autrement dit, f est Lipschitzienne de rapport $k = 1$ sur S. Si (f, S) et (g, T) sont de classe L, on note $(f, S) \prec (g, T)$ si $S \subset T$ et la restriction de g à S est égale à f.

1. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des couples (f, S) de classe L.

2. Soit (f_k, S_k) une suite croissante de couples de classe L. Montrer que, parmi les couples (g, T) de classe L, vérifiant

$$(f_k, S_k) \prec (g, T) \text{ pour tout } k,$$

il existe un couple minimal pour la relation $\prec$.

3. On se donne un couple (g, F) de classe L. On suppose que F est *fini.* Enfin, on se donne un point ξ de $I\!R^3$ n'appartenant pas à F. On définit un ensemble $P \subset I\!R^3 \times]0, +\infty[$ par

$$P = \{(g(x), \|x - \xi\|)\,;\, x \in F\}.$$

Dans la suite de cette question, on utilise le nombre c *de la partie II, associé à l'ensemble* P *ci-dessus, et on note* b *l'unique élément de* Y_c.

(a) Montrer qu'il existe des points $x^1, \ldots, x^4$ de F et des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in I\!R^+$, vérifiant

$$\forall 1 \leq i \leq 4, \quad \|b - g(x^i)\| = c\|x^i - \xi\|,$$

ainsi que

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i g(x^i) = b.$$

(b) En déduire que

$$2\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \|b - g(x^i)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{4} \lambda_i \lambda_j \|g(x^i) - g(x^j)\|^2.$$

(c) Montrer l'inégalité

$$2c^2 \left\| \sum_{i=1}^{4} \lambda_i (x^i - \xi) \right\|^2 + c^2 \sum_{i,j=1}^{4} \lambda_i \lambda_j \|x^i - x^j\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{4} \lambda_i \lambda_j \|x^i - x^j\|^2.$$

(on pourra utiliser l'identité précédente, ainsi que $2\langle u, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2$).

(d) En déduire que $c \leq 1$, puis que

$$\bigcap_{x \in F} B(g(x); \|x - \xi\|) \neq \emptyset. \tag{1}$$

4. Soit (f, S) de classe L, avec S *fini.*

   (a) Montrer qu'il existe (g, T) de classe L, avec $(f, S) \prec (g, T)$ et $S \neq T$.

   (b) Finalement, montrer qu'il existe $h : I\!\!R^3 \to I\!\!R^3$, Lipschitzienne de rapport un, dont la restriction à S est égale à f.

FIN D'EPREUVE