Rapport sur l'oral de mathématiques 2011

Oral spécifique E.N.S. Paris : Thomas Duquesne.
Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Vincent Calvez, Bertrand Deroin, Philippe Gille.

1 Remarques générales sur la session 2011

Le jury a noté l'excellent niveau général des candidats : cela est d'autant plus remarquable que le nombre d'heures de cours en mathématiques ne cesse de baisser dans l'enseignement secondaire alors que les programmes des classes préparatoires se maintiennent globalement dans leur étendue.

2 Commentaires d'ensemble

Les recommandations des années passées sont reconduites. Le jury espère qu'elles finiront par être prises en compte.

• Il est bon de s'écarter régulièrement du tableau pour laisser l'examinateur voir ce qu'on y a écrit.

• Inutile d'effacer sans arrêt ce qu'on écrit, avant même de savoir si ce sera utile ou non : le tableau est grand.

• Il faut trouver un juste équilibre entre un mutisme total et un flot de paroles ininterrompu (comment peut-on réfléchir dans ces conditions ?). Le jury apprécie de savoir où en est le candidat de ses réflexions, mais il n'est pas sûr qu'il soit dans l'intérêt du candidat de raconter tout ce qui lui passe par la tête. Il ne faut par ailleurs pas être surpris de voir l'examinateur quitter la salle quelques minutes en début d'épreuve pour laisser justement au candidat un temps de réflexion.

• L'examinateur ne cherche *jamais* à induire en erreur le candidat. Lorsque le candidat se trompe ou commet une bourde, il lui est toujours donné une occasion de se rattrapper ou de se corriger.

• Les exercices posés sont parfois longs : ne pas en venir à bout n'est pas nécessairement pénalisant. L'objectif de l'interrogation n'est pas de terminer (ou de faire terminer) tel ou tel exercice. Il s'agit plutôt d'une discussion visant à évaluer les connaissances et, dans une certaine mesure, les capacités mathématiques du candidat.

• Certains exercices sont laissés ouverts à dessein, afin de tester la capacité d'analyse du candidat ainsi que l'organisation de ses connaissances. La stratégie qui consiste à considérer des cas particuliers est appréciée à sa juste valeur.

• Le candidat doit bien écouter l'énoncé demandé ; certains donnent machinalement la solution d'un exercice qu'ils connaissent de mémoire sans se rendre compte qu'elle ne répond pas exactement à la question posée.

3 Commentaires mathématiques de détail

Bien que les exercices donnés aux oraux des ENS soient difficiles, il est nécessaire que les candidats sachent se débrouiller honorablement des questions simples ou peu techniques que le jury est amené (immanquablement) à leur poser ; nous ne dirons jamais assez qu'il faut maîtriser son cours. Mentionnons quelques lacunes fréquentes : la décomposition en facteurs simples des polynômes réels, la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à coefficients complexes, le critère de prolongement en 0 d'une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, les hypothèses de l'inégalité de Bessel, la résolution rigoureuse d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Par ailleurs, il est bon de pouvoir prouver rapidement dans le cas de la dimension 2 les résultats du programme d'algèbre linéaire.

Malgré l'excellent niveau général, on peut regretter que des candidats soient génés par des questions de logique élémentaire (négation de formules avec des quantificateurs) ou de dénombrements. La manipulation d'inégalités et de valeurs absolues est parfois peu rigoureuse. Le raisonnement par l'absurde est fréquemment utilisé en première approche et de façon un peu abusive. De nombreux candidats affirment procéder par "analyse-synthèse", ce qui peut être en effet une démarche efficace pour progresser dans la solution, mais ils doivent alors éviter les embrouillaminis logiques et tenir rigoureusement le fil de leur argumentation. Le jury a parfois demandé au candidat de transposer le raisonnement par l'absurde en un raisonnement direct.

De manière générale, les exercices d'analyse posent beaucoup de problèmes aux candidats. Le réflexe consistant à identifier les cas d'égalité est bénéfique. Certaines intégrations par parties délicates réclament une grande vigilance concernant l'intégrabilité des fonctions en jeu. Le candidat doit faire preuve d'esprit critique à chaque étape afin de ne pas faire apparaître des quantités vides de sens. Par ailleurs, il serait bon que les candidats puissent citer correctement le théorème de Cauchy-Lipschitz ou le théorème de convergence dominée lorsqu'ils l'invoquent (théorèmes dont l'usage n'est pas toujours nécessaire). Quand on travaille sur le plan complexe, il est souvent indiqué de faire un dessin afin de représenter graphiquement des conditions sur le module ou l'argument.

Les débordements du programme de certaines classes préparatoires ne rendent pas service à tous les candidats ! Certains croient se souvenir d'une solution, ce qui paralyse leur réflexion ; d'autres recrachent des notions mal assimilées, ralentissant considérablement le déroulement de l'oral. Signalons encore que les raisonnements “par densité” en algèbre linéaire conduisent parfois à des contresens.

Mentionnons enfin que, pour trouver une condition nécessaire et suffisante, obtenir après quelques manipulations aléatoires un certain nombre de conditions nécessaires et espérer ensuite qu'elles seront suffisantes ne constitue pas une démarche satisfaisante.

4 Quelques exercices posés à l'oral spécifique Ulm

- *Exercice 1.*

  a) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.

  b) Soit $(G, +, 0)$ un groupe additif. Un sous-ensemble fini $A \subset G$ est dit *sans somme* s'il ne contient pas d'éléments x, y, z (pas forcément distincts) tels que $x + y = z$.

Soit p, un nombre premier congrus à 2 modulo 3. Donner des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui soient sans somme. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui ne contient pas 0. Pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, non-nul, on pose

$$B(x) = A \cap \big\{x(k+1), x(k+2), \ldots, x(2k+1)\big\} .$$

Calculer

$$\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \#B(x) .$$

c) Soit A' un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe $B' \subset A'$ tel que B' soit sans somme et tel que

$$\#B' > \tfrac{1}{3}\#A' .$$

• *Exercice 2.* Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, la partie fractionnaire de x. On pose $\mathbf{T} = [0,1[\times[0,1[$. On définit $\theta : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$, en posant

$$\theta(x,y) = \big(\{2x+y\}, \{x+y\}\big) .$$

a) Montrer que θ est bijective. Expliciter sa réciproque.

b) On note P l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbf{T}$ dont la suite des itérés par θ est périodique. Montrer que $P = \mathbb{Q}^2 \cap \mathbf{T}$.

c) Soient $u, v \in \mathbb{N}^2$, non-colinéaires. On pose

$$\mathscr{P}_{u,v} = \big\{x.u + y.v \ ; \ 0 \leq x, y < 1\big\} .$$

Montrer que $\#\mathbb{Z}^2 \cap \mathscr{P}_{u,v} = \mathrm{Aire}(\mathscr{P}_{u,v}) = |\det(u,v)|$. En déduire le nombre a_n de vecteurs $v \in P$ laissés par fixes la n-ième itérée de θ.

• *Exercice 3.*

a) Soit

$$C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\big\} ,$$

le cercle unité. Paramétrer chaque point $(x,y) \in C\backslash\{(-1,0)\}$ par la pente de la droite passant par $(-1,0)$ et (x,y). Montrer que cette paramétrisation est bijective.

b) Soit p, un nombre premier différent de 2. On pose

$$C_p = \left\{(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\right\} .$$

Calculer $\#C_p$.

• *Exercice 4.*

a) On fixe $n \geq 2$ et on note G_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de la forme $a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$, avec $a_1 \neq 0$. Montrer que pour tous $P, Q \in G_n$, il existe un unique élément $P * Q \in G_n$ tel que $P \circ Q - P * Q$ soit divisible par X^n. Montrer que G_n, muni de $*$, est un groupe.

b) On note $\mathscr{N}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ nilpotentes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $N \in \mathscr{N}_n$, et tout entier $\ell \geq 1$, il existe une unique matrice $N_\ell \in \mathscr{N}_n$ telle que

$$(\mathrm{Id}_n + N_\ell)^\ell = \mathrm{Id}_n + N .$$

Montrer que $\lim_{\ell \to \infty} N_\ell = 0$.

c) On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\det(A) \neq 0$, et telle que tout entier $\ell \geq 1$, il existe une matrice $A_\ell \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $A = A_\ell^\ell$. Montrer que $A = \mathrm{Id}_n$.

• *Exercice 5.* Soit A, une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1 et dont le polynôme caractéristique est scindé. Selon les cas, trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, qui sont continues, 1-périodiques en chacune de leurs coordonnées et telles que $f(A.v) = f(v)$, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

• *Exercice 6.*

a) Soit n, un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe un polynôme P_n, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de degré n tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad (x + iy)^n + (x + iy)^{-n} = 2 ,$$

on ait nécessairement $P_n(x) = 0$.

b) Soit $(G,+,0)$ un groupe commutatif fini, ayant au moins deux éléments. On note $\#G = p_1^{\alpha_1} \dots p_\ell^{\alpha_\ell}$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{N}^*$, et $p_1, \dots, p_\ell$ sont des nombres premiers distincts. L'ordre de $x \in G$ est noté $\omega(x)$ et on note

$$\mu = \mathrm{PPCM}\big(\omega(x)\,;\, x \in G\big)\ .$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, \ell\}$, montrer l'existence de $x_j \in G$ tel que la p_j-valuation de $\omega(x_j)$ soit égale à la p_j-valuation de μ. Montrer qu'il existe $y \in G$ tel que $\omega(y) = \mu$.

On suppose de plus que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\#\{x \in G : n.x = 0\} \leq 2n - 1\ .$$

Montrer que G est cyclique.

c) Soit p un nombre premier différent de 2. On pose

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} ;\, x, y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\ :\ x^2 + y^2 = 1 \right\}\ .$$

Montrer que H, muni du produit matriciel, est un groupe cyclique.

5 Quelques exercices posés à l'oral commun Ulm-Lyon-Cachan

• Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients réels, et $u : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ un endomorphisme tel que

$$Tr(u(M)u(M')) = Tr(MM')$$

pour toute paire de matrices $(M, M') \in M_2(\mathbb{R})^2$.

1. Connaissez-vous de telles applications ?
2. On suppose de plus que $u(I_2) = I_2$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que le spectre de $u(M)$ est le même que celui de M pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ telle que $u(M) = PMP^{-1}$ pour toute matrice M, ou bien $u(M) = P^tMP^{-1}$ pour toute matrice M, où ${}^tM$ désigne la transposée de M.

Commentaire : La question 1. est destinée à tester si les candidats ont des exemples intéressants des objets qu'ils manipulent en tête, ce qui nous semble important. Nous sommes passés rapidement à la question 2. pour ceux qui n'ont répondu que trivialement à la question 1. La majorité d'entre eux ont pensé à la conjugaison après avoir résolu la question 2., mais peu ont trouvé la transposition.

• Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie d. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$; on note μ_f le polynôme minimal de f. Pour tout $x \in E$, on note E_x le sous-espace engendré par les $\left(f^j(x)\right)_{j \geq 0}$ et $\mu_{f,x}$ le polynôme minimal de la restriction de f à E_x.

1. Montrer que μ_f est le plus petit commun multiple des polynômes $\mu_{f,x}$ pour x parcourant E.
2. On considère l'ensemble $\Omega = \left\{x \in E \mid \mu_{f,x} = \mu_f\right\}$. Montrer que Ω est un ouvert dense de E.
3. Soit (f_n) une suite de $\mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_{f_n} = \mu_{f_n,x}$ pour tout entier $n \geq 1$.

• On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne standard $\| \|_2$.

1. Soit A une matrice réelle antisymétrique de taille n. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $X'(t) = A\,X(t)$ avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sont bornées.
2. Soient A, B des matrices symétriques de taille n. On suppose que la fonction $f(t) = \| \exp(tA) - \exp(tB)\|_2$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de A et B ?
3. Soient A une matrice symétrique de taille n. On s'intéresse à l'ensemble $H(A)$ des matrices inversibles P telles que la fonction $h(t) = \|P \exp(tA) - \exp(tA)\|_2$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $H(A)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, le déterminer.

• Cet exercice porte sur les propriétés topologiques des applications polynomiales.

1. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme. Montrer que P est une application continue fermée, c'est-à-dire l'image par P de tout fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Est-ce que cette propriété est vraie pour tout polynôme à deux variables $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$?
3. Construire un polynôme $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ tel que $P(\mathbb{R}^2)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

• Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$f'(x) > 1 \quad \text{et} \quad f(x+1) = f(x) + 2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. En considérant l'opérateur $(T\varphi)(x) = f^{-1} \circ \varphi(2x)$ agissant sur un ensemble convenable, montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + 1 \quad \text{et} \quad f \circ \varphi(x) = \varphi(2x) \tag{1}$$

   pour tout x dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe des constantes $C, \alpha > 0$ telles que

$$|\varphi(y) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

   pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|y-x| \leq 1$.

Commentaire : pour la question 2., certains candidats n'ont pas suivi l'indication et ont procédé par "analyse-synthèse", en remarquant que si φ est une solution de (1), alors pour toute paire d'entiers (n,p) avec $n > 0$, l'unique point fixe de $x \mapsto f^{\circ n}(x) - p$ est $\varphi(\frac{p}{2^n-1})$. Ceci permet de trouver φ sur la partie $\{\frac{p}{2^n-1} \mid (n,p) \in \mathbb{Z}^2, n > 0\}$, qui est dense dans $\mathbb{R}$. Cette analyse a été très appréciée.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $|||\cdot|||$ une norme subordonnée. On considère le système différentiel

$$u'(t) = \frac{1}{t}Au(t) + b\,,$$

avec la condition $u(t) = \mathscr{O}(t)$ $(t \to 0)$.

1. Donner une condition suffisante sur $|||A|||$ pour que ce système admette une unique solution u définie sur un intervalle de temps maximal.
2. Montrer que l'on peut prolonger $u(t)$ en une solution sur $[0, +\infty)$.

Commentaire : le jury a apprécié la capacité des candidats à considérer et à résoudre des cas particuliers (dimension $n = 1$, terme source $b = 0$). Le caractère suffisant de la condition demandée a prêté à confusion.

•

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}$ une matrice symétrique, définie positive. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle x, Ax\rangle\langle y, A^{-1}y\rangle \geq \langle x, y\rangle^2 .$$

2. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}$. Soit f la fonction définie comme

$$f(A, y) = \min_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, y\rangle^2} \right\} .$$

   Calculer $f(A, x)$ en fonction de x et A^{-1}.

3. En déduire que

$$\frac{\text{dét}(A + B)}{\text{dét}(A_i + B_i)} \geq \frac{\text{dét}\, A}{\text{dét}\, A_i} + \frac{\text{dét}\, B}{\text{dét}\, B_i} ,$$

   où A_i est le mineur (déterminant) obtenu à partir de A en enlevant la ligne i et la colonne i.

• Soient A, B des matrices symétriques. On ordonne les valeurs propres $\lambda_1(A) \leq \ldots \lambda_n(A)$, et $\lambda_1(B) \leq \ldots \lambda_n(B)$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(B)|^2 \leq \text{trace } (A - B)^2 .$$

Commentaire : en pratique, seul le cas co-diagonalisable a été mené à bien par les candidats, en commençant par le cas de la dimension $n = 2$. La capacité des candidats à tester des cas simples a été très appréciée.