

Rapport du jury concours commun ENS 2011 : MPI
Épreuve orale de TIPE de mathématiques

V. Humilière, P. Marchal, B. Schraen, H. Zaag (examineurs)

Déroulement de l'épreuve

L'épreuve de TIPE est commune aux trois ENS. Le candidat dépose, lors de son inscription au concours, un rapport sous la forme d'un *unique* fichier pdf¹ présentant son travail, et précise quelle en est la discipline dominante (mathématiques, informatique, physique). Le rapport, dont la longueur est d'environ deux à cinq pages, décrit la problématique que le candidat a choisi d'étudier, les outils qu'il a utilisés et les réponses qu'il a apportées ; il doit naturellement être l'œuvre du candidat et non la reproduction d'un ouvrage. Cependant, *ce rapport n'est pas évalué en tant que tel* : il constitue le support sur lequel s'appuiera l'épreuve orale. Il n'a pas pour vocation d'être encyclopédique ni de décrire toutes les connaissances de son auteur dans un domaine donné : il est donc inutile, même nuisible, de présenter des textes très longs que les examinateurs ne pourront pas étudier correctement, ou d'y adjoindre des annexes pléthoriques. À plus forte raison les pièces supplémentaires présentées le jour de l'épreuve ne seront pas prises en considération.

L'oral proprement dit dure 40–45 minutes. Le candidat est d'abord invité à présenter son travail, en abordant rapidement le contenu mathématique : cet exposé d'introduction sert à entrer dans le vif du sujet, le jury l'interrompt rapidement pour vérifier la compréhension des concepts utilisés en posant des questions plus précises ou en proposant des exercices courts en rapport avec le sujet traité. L'usage de transparents² illustratifs est autorisé mais nullement impératif ; il est en tout cas inutile de reproduire sous cette forme le contenu du rapport que le jury aura de toute façon sous les yeux.

Le candidat ne doit pas s'inquiéter de n'avoir eu le temps de présenter, à la fin de l'épreuve, qu'une petite partie du plan prévu, ni du fait que le jury ait concentré

¹Cet unique fichier pdf inclut la page de garde, et porte comme nom NOM-Prenom-TIPE-ENS-année.pdf (sans accents)

²À ce propos, nous rappelons que les règles de l'épreuve de TIPE à certains autres concours imposent la destruction des documents qui y sont apportés — ce n'est pas le cas aux ENS — et qu'il faut donc veiller à ne pas être pris au dépourvu en n'ayant plus aucun support de présentation.

ses questions sur un point particulier. On ne doit pas non plus être gêné par le fait que les examinateurs posent beaucoup d'exercices ou que leur rapport avec le sujet ne soit pas immédiatement évident (il peut ne se dégager que progressivement).

Critères d'évaluation

L'épreuve de TIPE de mathématiques est, avant tout, une épreuve de mathématiques. *Le premier critère d'évaluation est donc la bonne maîtrise du contenu mathématique de l'étude.* Les sujets pluridisciplinaires sont les bienvenus, tout comme les considérations d'ordre empirique et expérimental, ou les implémentations informatiques, mais le candidat doit être à même de les relier à une analyse mathématique (par exemple, d'un cas simplifié). Le jury souhaite trouver, notamment, des énoncés mathématiques précis sur lesquels il pourra asseoir ses questions. Le soin apporté à d'autres éléments du rapport ne peut en aucun cas remédier à l'insuffisance de contenu mathématique que nous avons constaté dans certains travaux.

En particulier, nous attirons l'attention du candidat sur l'*importance du choix de la discipline* dans laquelle il présentera son TIPE (mathématiques, informatique ou physique) et qui conditionne le jury qui l'écouterà : un TIPE centré sur la programmation informatique d'un algorithme de résolution (type Rubik's cube) aurait peut-être été plus avantageusement présenté en informatique. Les jurys ne sont pas mixtes et le jury de mathématiques n'a pas vocation à tester les programmes informatiques. *On attend dans tous les cas que le travail ait un contenu scientifique sérieux dans la discipline en question.*

Compétences attendues

L'épreuve de TIPE a la particularité de permettre au candidat de choisir le thème sur lequel il sera interrogé. En contrepartie, le jury attend de sa part une bonne compréhension de ce sujet et des outils mathématiques employés pour le traiter.

Il va de soi qu'on ne suppose du candidat *a priori* aucune connaissance au-delà du programme des classes préparatoires, et nous lui conseillons de rester autant que possible dans ce cadre, ne s'en écartant que si cela est nécessaire au sujet choisi. Nous pensons de façon générale qu'il est possible de trouver des thèmes riches et originaux sans s'éloigner beaucoup du programme.

En revanche, la maîtrise des concepts avec lesquels on prétend avoir travaillé est indispensable. Au minimum, pour chaque terme introduit on peut s'attendre à ce que le jury demande un exemple ou un contre-exemple, ou fasse vérifier la définition dans un cas simple. Ces questions ne doivent pas prendre le candidat au dépourvu. Le jury a été surpris de voir des candidats présenter des propriétés fines de structure des groupes de matrices, sans pouvoir démontrer que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable.

S'agissant d'un théorème, le candidat doit être capable, si on le lui demande,

d'exposer les idées-clés de sa démonstration sans entrer dans les détails, ou d'expliquer en quoi il est pertinent et en quoi les hypothèses sont nécessaires. Il n'est bien sûr pas défendu d'admettre une démonstration mais on devra au moins avoir une idée de sa difficulté.

À titre d'exemple, on attend d'un candidat dont le TIPE porte sur les équations différentielles de savoir *précisément* citer le théorème de Cauchy-Lipschitz : cela ne signifie pas qu'il doive en connaître les hypothèses minimales, mais il doit pouvoir expliquer pourquoi celles qu'il énonce ne sont pas inutiles, et connaître des exemples et contre-exemples éclairants. Naturellement, plus un concept ou un théorème est central au thème du TIPE, plus on attendra que sa compréhension soit bien maîtrisée du candidat. Pour prendre un autre exemple, un candidat ayant choisi d'étudier les représentations continues de groupes topologiques compacts doit pouvoir donner sans hésitation un exemple de représentation irréductible du groupe fini S_3 .

Mentionnons encore un domaine très populaire, et pourtant risqué, qui est celui des probabilités. Les candidats doivent être capables de raisonner avec la même rigueur que pour tout autre sujet mathématique et ne pas se cantonner à de vagues intuitions. Ainsi, il est impensable, comme cela a été vu de nombreuses fois cette année, qu'un candidat se retrouve démuni face à la question : « qu'est-ce qu'une probabilité ? » ou encore « qu'est-ce qu'une variable aléatoire ? ». Sans connaître nécessairement très précisément la notion de tribu, il est tout de même souhaitable que celui qui traite des chaînes de Markov puisse donner la formule calculant la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ et connaisse la notion d'indépendance d'événements (puisque ces concepts figurent dans son rapport !). Nous insistons sur le fait que, sortis du cadre des probabilités discrètes sur un ensemble dénombrable, on dépasse le niveau du programme de classes préparatoires. En particulier, il est possible de traiter le cas des chaînes de Markov à temps discret sur un ensemble dénombrable et à horizon de temps fini. Mais dès que l'on ne borne pas le temps, on a besoin de théorie de la mesure. C'est le cas par exemple quand on dit qu'une marche aléatoire part à l'infini ou, au contraire, revient au point de départ (sous-entendu : presque sûrement).

Un certain nombre de candidats ont choisi d'aborder la résolution numérique d'équations différentielles. La méthode d'Euler pour la discrétisation des équations différentielles est souvent mal comprise : les élèves ne comprennent pas quel objet ils construisent à l'étape n , puis ne savent pas « qui converge vers quoi ».

Nous mettons spécialement en garde les candidats contre la tentation d'aborder des sujets très ambitieux et par conséquent mal maîtrisés, ou encore de choisir un domaine mathématique vaste (comme la topologie algébrique ou l'analyse complexe), et de présenter un rapport qui n'est qu'une compilation de théorèmes sans initiative personnelle et sur laquelle on n'aura aucun recul. Il est par exemple dommage d'étudier le théorème de Grobman-Hartman sans pouvoir donner d'ap-

plication à l'étude d'équations différentielles.

Thèmes choisis

Le thème de l'année était *Mobilité, mouvement*. À titre d'exemple, voici quelques-uns des thèmes les plus fréquents dans lesquels s'inscrivent les sujets que nous avons rencontrés cette année :

- études d'équations différentielles : stabilité, stabilité structurelle, exemples concrets tels que Lotka-Volterra, propagations d'épidémies, résolution numérique, théorème de Poincaré-Bendixson, etc. ;
- systèmes dynamiques : suites définies par récurrence, fonction logistique, fractales... ; dynamique des groupes de matrices ;
- équations aux dérivées partielles : équation de la chaleur, équation de transport (p.ex. modélisation du trafic routier) ;
- probabilités : chaînes de Markov, marches aléatoires, mouvement brownien, percolation, graphes aléatoires ;
- algèbre tropicale (modélisation de systèmes discrets) ;
- théorie de Galois : résolubilité par radicaux, constructions à la règle et au compas ;
- théorie des groupes : représentations des groupes, théorèmes de structure (théorèmes de Chevalley, de Jordan etc.), actions de groupes, etc. ;
- théorie analytique des nombres : séries de Dirichlet, fonctions ζ et fonctions L ;
- calcul des variations, équations d'Euler-Lagrange, problème de la brachistochrone, géodésiques ;
- problème d'optimisation : courbes de poursuite ;
- approximation des réels par les rationnels, fractions continues ;
- mathématiques du jonglage ;
- automates cellulaires (souvent en lien avec une autre modélisation d'un même phénomène) ;
- topologie algébrique : groupe fondamental, revêtements ;
- réseaux de \mathbb{R}^n , algorithme LLL.

Remarques sur la forme

Les rapports écrits nous ont semblé, dans l'ensemble, soignés et d'un bon niveau, généralement agréables à lire. C'est le signe que l'épreuve est prise au sérieux et travaillée pendant la période (pourtant chargée) de la prépa. Il est appréciable de voir une véritable bibliographie³ figurer en fin du rapport.

³Rappelons à ce sujet qu'un article scientifique doit être cité en indiquant les auteurs, le titre, le nom de la revue où il est paru, le volume, l'année, et les pages de début et de fin ; quant à un livre, il ne faut pas oublier d'en préciser l'éditeur et l'année. Pour un article de Wikipédia, il convient de donner le titre exact, la langue d'édition, et la date de consultation de l'article.

Certains candidats ont présenté un travail commun sur un sujet. Le jury apprécierait que, dans un tel cas, le candidat le mentionne. Il sera dans tous les cas évalué sur sa compréhension personnelle du sujet présenté. Il est donc fortement recommandé que deux candidats ayant travaillé ensemble ne présentent pas le même rapport.

Les rapports sont acceptés au format pdf depuis 2010. Le jury souhaite mettre l'accent sur quatre points :

- un certain nombre de candidats rendent leur pdf plusieurs jours après l'inscription aux oraux, certains le rendant la veille de l'examen oral, ce qui ne laisse évidemment guère de temps au jury pour les lire et pénalise naturellement le candidat ;
- un certain nombre de candidats rendent un rapport dans un autre format. Ceci complique la tâche des examinateurs. Presque tous les ordinateurs et scanners proposant le format pdf aujourd'hui, nous recommandons donc aux candidats d'utiliser celui-là ;
- un certain nombre de candidats rendent plusieurs fichiers : le rapport seul, les illustrations seules, les annexes seules, et parfois même la bibliographie sur fichier séparé. Des outils existent permettant de convertir tous les formats en pdf, et le cas échéant de concaténer tous les fichiers en un seul ;
- nous demandons aux candidats de veiller à ce que la fiche synoptique figure bien en première page de leur rapport.

En cas d'usage de transparents, ceux-ci doivent être lisibles. La simple photocopie du document écrit donne généralement des caractères trop petits. Précisons qu'il ne sert à rien de projeter le texte du rapport, que le jury a sous les yeux.

Le jury a parfois orienté son interrogation dans le but de faire découvrir au candidat une propriété ou une idée adjacente à celles contenues dans le rapport. Il ne faut bien sûr pas interpréter cette ligne d'interrogation comme le reproche d'une lacune dans le travail effectué, mais bien comme une invitation à la curiosité intellectuelle même au cours de l'épreuve : nous avons ainsi pu mesurer combien certains étaient réellement intéressés par le sujet qu'ils avaient étudié.

Pour finir, nous tenons à remercier ceux qui, par le recul qu'ils ont pris sur la question qu'ils étudiaient, le niveau de leur travail et la qualité de leur exposé, nous ont donné l'occasion d'avoir un échange d'un réel intérêt scientifique.

Coefficients :

Ulm : 8/111 (MPI), 1/30 (I)
Lyon : 1.5/32.5 (MPI), 1.5/30.5 (I)
Cachan : 2/51 (MPI), 2/49 (I)