Épreuve écrite de mathématiques 2011
ENS de Cachan, Lyon et Paris
Coefficients : Cachan 5, Lyon 4 et Paris 4
Durée : 4h
Jury : Vincent Calvez, Daniel Han-Kwan, Adrien Joseph, Paul Laurain et Erwan Le Pennec

Ce problème avait pour objet l'étude de processus de diffusion sur des ensembles finis. Les parties 1 et 2 introduisaient les concepts d'énergie et d'entropie et il s'agissait de démontrer leur convergence exponentielle vers 0. Cela passait par l'étude des constantes de Poincaré et de Sobolev des processus étudiés. Enfin, la partie 3 concernait l'étude d'un exemple sur l'hypercube.

La moyenne est de 7,1 et l'écart-type de 4,0.

La plupart des candidats ont abordé superficiellement chaque partie et se sont limités aux questions les plus « faciles ». Rares sont ceux qui se sont attaqués sérieusement aux questions plus délicates : c'est pourtant cette attitude qui a été la plus recherchée et la plus valorisée. Le jury a également été sensible aux qualités de présentation et de rédaction des copies.

Dans la partie 1, la question 1)c) constituait la première difficulté du problème. Beaucoup trop de candidats ont oublié l'hypothèse d'irréductibilité et invoquent un argument de passage à la limite pour la simplicité de la valeur propre, ce qui est absurde ! On pourra en effet penser à une matrice diagonale dont tous les coefficients sont distincts et convergent vers 1. La question 2)b) introduisait le quotient de Rayleigh afin de déterminer la plus petite valeur propre de $\mathrm{Id} - P$ sur $\langle \pi \rangle^{\perp}$; il s'est avéré que même si beaucoup de candidats ont bien pensé à la notion de compacité pour prouver que μ était atteinte, celle-ci reste très mal maitrisée, à la grande surprise des examinateurs. Beaucoup trop de candidats ont par ailleurs oublié la condition $\langle \pi, v \rangle = 0$ et ont préféré minimiser sur tout $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. La question 3)a) a révélé que beaucoup de candidats avaient très mal compris le théorème de Cauchy-Lipschitz (linéaire) : il est important d'en vérifier précisément les hypothèses et non de l'invoquer comme une formule magique. Enfin, la question 3)c), plutôt classique, a été bien traitée par les rares candidats qui l'ont abordée.

La partie 2 présentait des questions de niveaux très variés et a été abordée par quasiment tous les candidats. La question 1 était relativement classique mais il fallait faire attention à la condition de normalisation du vecteur u ($\sum u_i = 1$ et non $\sum u_i = 0$). Dans la question 2, mener à bien le développement limité suggéré par l'énoncé s'est avéré extrêmement délicat pour de nombreux candidats. La seconde partie de la question a été généralement bien traitée quand elle a été abordée. La question 3 a été très largement réussie, de nombreux candidats utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz plutôt que l'inégalité de Jensen suggéré par l'énoncé. Notons que les candidats ont souvent oublié de justifier le cas « trivial » $a = b$ qu'ils ont utilisé par la suite. La question 4 a été nettement moins réussie : peu de candidat ont pensé à utiliser la commutativité de I et P pour réécrire l'exponentielle comme un produit et obtenir la positivité des coefficients. De même, la stricte positivité n'a été que rarement établie. (On pouvait l'obtenir en utilisant l'inversibilité de l'exponentielle qui implique la non existence de ligne entièrement nulle.) Les deux sous-questions suivantes ont également posé des difficultés à de nombreux candidats et ceux qui y sont venus à bout ont été largement récompensés. La question 5)a) a été ignorée par la très grande majorité des candidats et peu de ceux qui l'ont attaquée ont donné la bonne réponse alors qu'il suffisait d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité de question 5b) a été encore moins abordée et la majorité des candidats ayant essayé ont cherché à l'obtenir comme une conséquence de la question précédente, alors qu'elle s'obtenait de manière indépendante par un calcul astucieux. L'inégalité de la question 5)a), qui exprime que la variation totale est contrôlée par l'énergie, était en fait utile plus tard, pour la question 4)a) de la partie 3.

La partie 3 était dédiée à l'étude d'un exemple. Les premières questions ont parfois été traitées par des candidats n'ayant pas abordé la partie 2. Cela ne les a pas pénalisés, sauf s'ils ne répondaient que de façon superficielle aux questions abordées. Diverses solutions ont été proposées pour la questions 1)a). Il était commode de remarquer que la somme pouvait se mettre sous la forme d'un produit simple, donnant une condition suffisante (et nécessaire) pour la nullité de ladite somme. Les questions suivantes, assez calculatoires, ont été bien traitées. La concision était appréciée. La question 3) permettait au candidat de montrer qu'il avait bien compris le problème. À la question 3)c), la minoration de la constante de Poincaré demandait de considérer les éléments $v \in \mathbb{R}^E \setminus 0$ vérifiant $\langle \pi, v \rangle = 0$. Sa majoration était obtenue en exhibant un élément v bien choisi (que l'on pouvait deviner à l'issue de l'étape de minoration).