

SESSION 2011

SECOND CONCOURS
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

PHYSIQUE - MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures.
Le sujet comporte 14 pages.

L'usage des calculatrices électroniques de quelque nature que ce soit est **interdite**.

Pour satisfaire la curiosité de Sophia, le sujet aborde successivement 4 parties :

- la 1^{ère} partie s'intéresse aux bulles dans une flûte de Champagne ;
- la 2^{nde} porte sur le mouvement d'un sauteur à l'élastique ;
- la 3^{ème} traite de la propagation d'un signal dans une ligne électrique ;
- et la 4^{ème} et dernière partie, plus succincte, permet d'étudier les conditions favorables pour observer la projection d'un film.

Les 4 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans le désordre. Les candidats veilleront toutefois à reproduire la numérotation des questions dans leurs copies.

L'épreuve favorisera les candidats capables de faire des approximations justifiées et des calculs d'ordre de grandeur. Ces derniers seront utilement exprimés à l'aide des puissances de 10.

Première partie

Les bulles du Champagne

Pour fêter son admission à l'Ecole Normale Supérieure, Sophia offre une coupe de Champagne à ses amis. Cette première partie vise à comprendre quels sont les paramètres qui régissent la taille des bulles, et à étudier sommairement leur mouvement ascendant. Pour simplifier l'étude, considérons une flûte cylindrique de rayon $r = 1$ cm et de hauteur $h = 12$ cm. Cette flûte est remplie à ras-bord de Champagne, qui sera considéré dans un premier temps comme un liquide non visqueux, de masse volumique ρ_{liq} . Nous nous repérons dans cette flûte par la profondeur z , orientée vers le bas, et ayant pour origine la surface du liquide.

Question I-1.

Donner un ordre de grandeur (en précisant les unités) pour la pression à la surface libre du liquide, que l'on notera P_0 , et pour la masse volumique du champagne, ρ_{liq} .

Question I-2.

En négligeant dans un premier temps le phénomène à l'origine des bulles, montrer que la pression dans le liquide augmente avec la profondeur selon une loi linéaire du type : $P_{liq}(z) = P_0 + \rho_{liq}gz$; préciser ce que représente g , et donner un ordre de grandeur pour sa valeur numérique (sans oublier l'unité correspondante).

Question I-3.

En partant des ordres de grandeurs fournis dans les questions précédentes, tracer l'évolution de la pression en fonction de la profondeur, $P_{liq}(z)$, valable sur toute la hauteur de la flûte de Champagne ; quelle est l'ordre de grandeur de la pression au fond de la flûte ?

Nous nous intéressons maintenant aux bulles qui sont présentes en nombre dans une flûte de Champagne.

Question I-4.

Quel est le gaz majoritairement présent dans ces bulles ?

Dans la suite, nous allons chercher à voir quels paramètres imposent la dimension des bulles. Pour cela, nous faisons plusieurs hypothèses :

- les bulles sont supposées parfaitement sphériques, de rayon $R(z)$ pouvant éventuellement dépendre de la profondeur z ;
- la pression du gaz est supposée uniforme dans chaque bulle mais elle peut dépendre de la profondeur de la bulle z , elle est notée $P_{gaz}(z)$;
- la pression du liquide avoisinant ne varie pas significativement entre le haut et le bas de la bulle, donc pour chaque bulle, on pourra écrire que la pression du liquide autour est constante et vaut $P_{liq}(z)$ à la profondeur de la bulle z .

Question I-5.

Quel ordre de grandeur attendez-vous pour le rayon d'une bulle de champagne ?

On peut montrer que la pression dans la bulle, $P_{gaz}(z)$ est toujours supérieure à la pression du liquide avoisinant, $P_{liq}(z)$, la différence entre les deux étant supportée par l'interface liquide-gaz. Cette différence est donnée par la loi de LAPLACE :

$$P_{gaz}(z) - P_{liq}(z) = \frac{2\gamma}{R(z)}$$

où la constante γ est appelée la *tension superficielle* à l'interface liquide-gaz.

Question I-6.

| Précisez la dimension de γ .

Question I-7.

| Sachant que la tension superficielle (pour l'interface liquide-gaz considérée ici) vaut environ $73 \cdot 10^{-3}$ dans les unités du système international, donner un ordre de grandeur de la surpression dans la bulle due à l'interface, et commentez la valeur obtenue.

Par soucis de simplicité, nous ferons l'hypothèse que le gaz enfermé dans la bulle vérifie la loi $P_{gaz}(z) \cdot V_{gaz}(z) = nRT$, où

- $P_{gaz}(z)$ est la pression dans la bulle, exprimée en Pascal,
- $V_{gaz}(z)$ est le volume de la bulle, en m^3 ,
- n est la quantité de gaz enfermée dans la bulle, supposée constante et exprimée en moles,
- R est une constante valant 8,31 dans les unités du système international,
- T est la température du gaz, supposée constante et exprimée en Kelvin.

Question I-8.

| Quel est le nom de la loi $P_{gaz}(z) \cdot V_{gaz}(z) = nRT$?

Comme n , R et T sont supposés constants pour une même bulle, quelle que soit sa profondeur, la loi précédente peut se réécrire plus simplement $P_{gaz}(z) \cdot V_{gaz}(z) = E_0$, où la constante E_0 a la dimension d'une énergie. On supposera que cette constante est la même pour toute les bulles.

Question I-9.

| Précisez l'ordre de grandeur de cette énergie E_0 ; on rappelle que le volume V d'une sphère de rayon R est donné par $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Question I-10.

| En déduire une valeur raisonnable pour la quantité de gaz enfermé dans la bulle, n .

Question I-11.

| Sachant que la masse molaire du gaz est de $44 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, donner un ordre de grandeur pour la masse de gaz présente dans la bulle, notée m_{gaz} .

Nous privilégions dans la suite une approche énergétique, et sans rentrer dans le détail du calcul, nous admettrons que l'énergie potentielle de l'interface liquide-gaz peut se mettre sous la forme :

$$E_{pot}(R, z) = \frac{4}{3}\pi R^3 P_{liq}(z) - E_0 \ln\left(\frac{R^3}{R_0^3}\right) + 4\pi R^2 \gamma,$$

où $R_0 = 1 \text{ m}$ est une constante nécessaire à l'homogénéité et $\ln(\cdot)$ est la fonction logarithme népérien; cette énergie potentielle est donc une fonction de R à une profondeur z fixée.

Question I-12.

| Quelles sont les limites de cette énergie potentielle, à la profondeur z fixée, pour $R \rightarrow 0$ et pour $R \rightarrow +\infty$?

L'équilibre de la bulle est obtenu pour la valeur de R qui correspond à un extremum de cette énergie potentielle. Nous noterons par la suite R_{eq} cette valeur particulière de R .

Question I-13.

| En déduire une équation vérifiée par R_{eq} , faisant notamment intervenir $P_{liq}(z)$, E_0 et γ .

Il s'agit d'une équation que nous ne savons pas résoudre de façon simple en l'état.

Question I-14.

En reprenant les données de l'énoncé et les ordres de grandeurs obtenus dans les questions précédentes, montrer que les différents termes de l'équation précédente n'ont pas du tout la même importance ; lequel de ces termes peut-on négliger ?

Question I-15.

En déduire une expression approchée de R_{eq} ; comment cette grandeur évolue-t-elle en fonction de la profondeur z ?

Question I-16.

Quels sont donc les paramètres qui imposent la taille des bulles ?

L'équilibre ainsi obtenu est stable si et seulement si l'extremum considéré correspond à un minimum de l'énergie potentielle.

Question I-17.

Vérifier que $\frac{d^2 E_{pot}}{dR^2}$ est positive pour toute valeur de $R > 0$, donc en particulier pour R_{eq} , puis justifier en quoi cela prouve la stabilité de l'équilibre.

Dans la suite de la première partie, nous nous penchons sur le mouvement ascendant des bulles. Rappelons que la quantité de gaz est supposée constante dans la bulle quelle que soit sa profondeur : la masse d'une bulle de gaz, notée m_{gaz} , pourra donc être considérée comme indépendante de la taille de la bulle et de sa profondeur.

Question I-18.

Lister les différentes forces qui s'exercent sur la bulle, et donner leurs expressions en fonction des données du problème. À ce stade, pouvez-vous déjà faire des approximations ?

Question I-19.

En déduire une expression de l'accélération de la bulle et vérifier que le mouvement se fait bien vers le haut.

Pour être plus réaliste, il convient de prendre en compte la viscosité du Champagne ; pour le cas qui nous intéresse, nous choisirons une force de frottements vérifiant la loi de STOKES, c'est-à-dire de la forme $\vec{f}_S = -\mu\Phi\vec{v}$, où :

- μ est la viscosité du fluide, de l'ordre de 10^{-3} Pa·s pour le Champagne,
- Φ est le *facteur de forme*, homogène à une longueur,
- \vec{v} est la vitesse de la bulle.

Le facteur de forme d'une sphère de rayon R vaut $6\pi R$ si la sphère est rigide (une bille par exemple) et $4\pi R$ si la sphère est déformable (ou fluide).

Question I-20.

Comment justifier cette différence entre sphère rigide et sphère fluide ?

Question I-21.

Après avoir fait votre choix pour le cas d'une bulle de Champagne, exprimer le facteur de forme retenu en fonction du rayon de notre bulle, R_{eq} .

Question I-22.

Montrer qu'en prenant en compte la viscosité, la vitesse scalaire de la bulle vérifie l'équation suivante :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu\Phi}{m_{gaz}}v = -\frac{4\pi R_{eq}^3 \rho_{liq} g}{3m_{gaz}}$$

en précisant les approximations réalisées.

Comme la constante de temps $\frac{m_{gaz}}{\mu\Phi}$ est très faible, de l'ordre de la microseconde, le régime permanent est très rapidement atteint. Nous pourrions donc considérer que la vitesse est indépendante du temps.

Question I-23.

Quelle est l'expression de cette vitesse en régime permanent ?

Question I-24.

Comparer l'ordre de grandeur obtenu par rapport à votre vécu, et discuter de l'évolution de cette vitesse en fonction de la profondeur z .

Deuxième partie

Le saut à l'élastique

Sophia aime les sensations fortes, et après cette année de préparation aux concours, elle décide d'oser enfin tenter un saut à l'élastique : il s'agit de sauter dans le vide depuis un pont, avec un élastique accroché aux pieds. Si tout se passe bien, l'élastique finit par ralentir la chute de l'impétrante et la fait remonter avant qu'elle ne touche le sol... S'ensuit alors une série de "rebonds" avant une stabilisation.

Dans l'exemple que nous proposons d'étudier ici, les données sont les suivantes :

- le parapet du pont (*id est* le départ du saut) est situé 100 mètres au dessus du sol ;
- l'élastique au repos fait 25 mètres de long, une de ses extrémités est accrochée solidement au parapet du pont ;
- lorsqu'on accroche une masse de 1 kg à son extrémité libre, pendant dans le vide, l'élastique s'étire de 10 cm ;
- même si c'est une approximation un peu grossière, la masse de l'élastique sera négligée ;
- le fabricant de l'élastique garantit une résistance à la rupture pour une force de 50 kN au moins.

Question II-1.

Définir la raideur de l'élastique, qui se comporte ici comme un ressort, et préciser sa valeur et son unité.

Lorsque le sauteur est stabilisé, après son saut, il reste suspendu dans le vide par l'élastique. Ce dernier est étiré par rapport à son état au repos.

Question II-2.

Si la masse du sauteur est $M = 100$ kg, quelle est la distance finale entre le parapet du pont et le sauteur ?

Pour simplifier les expressions dans la suite de l'étude, nous choisissons un repère qui peut paraître peu intuitif : l'axe (Oz) est dirigé vers le bas, et son origine est prise à l'extrémité libre de l'élastique lorsque celui-ci est au repos, c'est-à-dire 25 mètres en-dessous du parapet du pont. Dans ce repère :

- le parapet est donc repéré par la position $z_P = -25$ m ;
- le sol est quant à lui repéré par la position $z_S = 75$ m.

Question II-3.

Dans ce nouveau repère, à quelle valeur correspond la position finale du sauteur ?

Nous allons désormais détailler les différentes phases du mouvement entre le saut et la stabilisation.

Phase 1 : $z_P < z < 0$ Durant cette phase, l'élastique est détendu et n'exerce aucune force sur le sauteur ; ce dernier est donc en chute libre. Jusqu'à nouvel ordre, et en particulier jusqu'à la question II-14 incluse, tous les frottements seront négligés.

Question II-4.

Déterminer l'expression de $z(t)$, position du sauteur en fonction du temps, valable seulement pour $z_P < z < 0$.

Question II-5.

| Quelle est l'ordre de grandeur de la durée de cette chute libre, entre $z = z_P$ et $z = 0$?

Pour traiter ce problème selon une approche énergétique, nous définissons le système {sauteur} et tous les calculs d'énergie s'y rapporteront.

Question II-6.

| Définir l'énergie potentielle de pesanteur, notée E_{P-pes} et préciser ses valeurs au début ($z = z_P$) et à la fin ($z = 0$) de la 1^{ère} phase.

Question II-7.

| Faire de même avec l'énergie cinétique, notée E_C , puis en déduire un ordre de grandeur de la vitesse atteinte par le sauteur lorsqu'il passe en $z = 0$.

Phase 2 : $z > 0$ Durant cette nouvelle phase, l'élastique se tend progressivement, et exerce donc une force de rappel sur le sauteur.

Question II-8.

| Représenter avec une échelle arbitraire toutes les forces qui s'exercent sur le sauteur lorsqu'il est "un peu" en dessous du point $z = 0$.

Le théorème de l'énergie cinétique, appliqué entre une position A et une position B , s'écrit :

$$\Delta E_C = \int_{z_A}^{z_B} (\vec{F}_{tot} \cdot \vec{dz}),$$

où :

- $\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)$ est la variation d'énergie cinétique entre les positions A et B ;
- \vec{F}_{tot} est la force *totale* s'exerçant sur le système entre les positions A et B ;
- \vec{dz} est un petit déplacement sur le chemin entre A et B .

Question II-9.

| En adaptant ce théorème à notre situation et en choisissant judicieusement les positions A et B , établir une équation vérifiée par z_{max} , qui désigne la valeur maximale atteinte pour la variable z .

Question II-10.

| Montrer qu'il n'existe qu'une seule solution physiquement acceptable, et donner son expression ainsi qu'un ordre de grandeur de la valeur numérique associée.

Lorsque $z = z_{max}$, l'élastique est étiré au maximum : c'est le moment où la tension est la plus élevée.

Question II-11.

| Vérifier que la force développée par l'élastique à cet instant n'excède pas la limite de rupture donnée par le fabricant.

Question II-12.

| Donner également un ordre de grandeur de l'accélération subie par le sauteur au moment du "demi-tour".

La phase 2 prend fin lorsque le sauteur repasse (en remontant) à la position $z = 0$.

Question II-13.

En justifiant votre raisonnement, indiquer quelle est la vitesse du sauteur à la fin de cette seconde phase.

Question II-14.

Quelles sont les étapes suivantes, si l'on néglige toujours les frottements ?

Pour gagner en crédibilité, nous allons affiner notre étude en voyant comment les frottements, à la fois dans l'air et dans l'élastique, modifient le mouvement du sauteur. Nous nous intéressons pour cela à l'énergie potentielle *totale*, notée E_{P-tot} , et qui est la somme à chaque instant :

- de l'énergie potentielle de pesanteur, E_{P-pes} , déjà introduite,
- et de l'énergie potentielle élastique, E_{P-elas} , emmagasinée dans l'élastique lorsqu'il se tend.

Nous admettons que cette énergie potentielle élastique peut s'exprimer par $E_{P-elas} = \frac{1}{2}k \cdot z^2$, où k est la raideur de l'élastique.

Question II-15.

Donner les expressions de cette énergie potentielle totale, respectivement pour $z < 0$ et pour $z > 0$.

Question II-16.

Représenter symboliquement sur un graphe unique, pour $z \in [z_P; z_{max}]$, la fonction $E_{P-tot}(z)$.

Question II-17.

Cette fonction admet un minimum unique : à quelle valeur de z correspond-il ?

Les frottements "consomment" typiquement 20 % de l'énergie à chaque oscillation du sauteur.

Question II-18.

Décrire comment l'analyse du graphe précédent permet de déterminer la position à laquelle remonte le sauteur après un premier aller-retour ; donner un ordre de grandeur de la distance qui le sépare alors du pont et commenter cette valeur.

Au bout d'un certain nombre d'oscillations, la position du sauteur reste strictement positive, c'est à dire que l'élastique ne se détend plus jamais totalement.

Question II-19.

En sachant qu'une oscillation dure entre 6 et 7 secondes, déterminer le temps nécessaire pour que z reste strictement positif.

L'énergie mécanique est définie comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle totale : $E_m = E_C + E_{P-tot}$.

Question II-20.

Quelles sont les valeurs de E_m au tout début du saut, et à la toute fin du mouvement ?

Question II-21.

Préciser où est passée la différence énergétique, et si elle est récupérable ou non.

Troisième partie

Transmission le long d'une ligne électrique

Dans cette troisième partie, nous nous intéressons à la transmission d'un signal électrique le long d'une ligne de transmission, comme l'est par exemple la ligne de téléphone que Sophia a utilisée pour annoncer la bonne nouvelle (son admission) à ses proches. Cette ligne sera modélisée en utilisant des *constantes localisées*, c'est à dire qu'un tronçon élémentaire de longueur dx appartenant à la ligne sera considéré comme équivalent au quadripôle de base indiqué sur la figure 1. Dans cette dernière, l'inductance dL et la capacité dC sont des grandeurs infinitésimales : $dL = \Lambda dx$ et $dC = \Gamma dx$, Λ et Γ sont les paramètres de la ligne, respectivement appelés *inductance linéique* et *capacité linéique*.

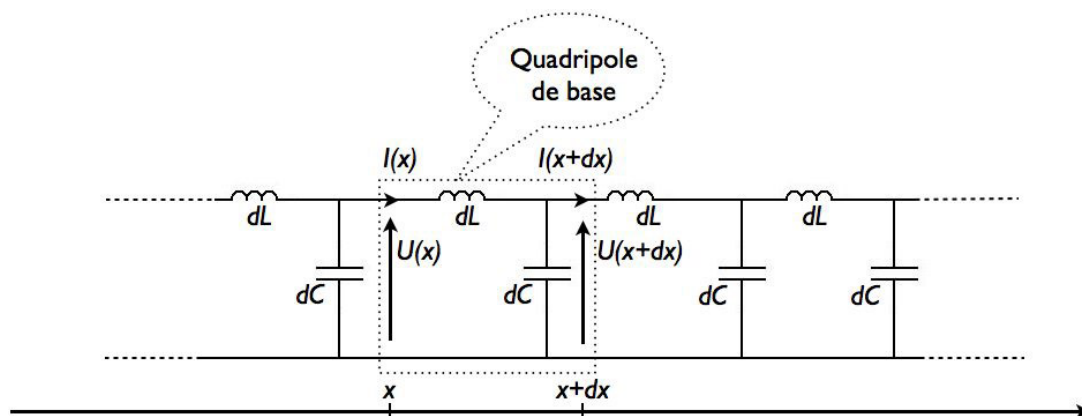


FIGURE 1 – Modèle d'une ligne électrique

Question III-1.

| Préciser les dimensions respectives de Λ et Γ .

Question III-2.

| Pour une ligne électrique de longueur l_0 , pouvez-vous exprimer littéralement son inductance ainsi que sa capacité?

Rappelons pour mémoire les équations différentielles qui régissent le comportement d'un condensateur et d'une bobine, courants et tensions étant orientés selon une convention "récepteur" :

$$I_C(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

et $U_L(t) = L \cdot \frac{dI_L}{dt}$.

Dans notre ligne, la longueur est telle qu'il est impossible de considérer le régime comme stationnaire : le courant et la tension dépendent donc des deux variables, le temps t et l'abscisse x le long de la ligne. Nous les notons donc respectivement $I(t, x)$ et $U(t, x)$; la dérivée du courant par rapport à la coordonnée d'espace s'écrit alors comme une dérivée partielle :

$$\frac{\partial I}{\partial x}(t, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{I(t, x + \Delta x) - I(t, x)}{\Delta x} \right);$$

quant à la dérivée du courant par rapport au temps, elle s'écrit naturellement :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{I(t + \Delta t, x) - I(t, x)}{\Delta t} \right).$$

Question III-3.

Etablir une première relation entre le courant $I(t, x)$, le courant $I(t, x + dx)$, et la tension $U(t, x + dx)$.

Question III-4.

Montrer qu'il existe une autre équation, qui relie cette fois la tension $U(t, x)$, la tension $U(t, x + dx)$, et le courant $I(t, x)$.

Question III-5.

En justifiant proprement les approximations nécessaires, montrer que ces deux relations conduisent au système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\frac{\partial I}{\partial x}(t, x) = C \cdot \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(t, x) = -L \cdot \frac{\partial I}{\partial t}(t, x) \quad (2)$$

A ce stade, il pourra être utile d'invoquer la propriété mathématique suivante (valable tant pour $I(t, x)$ que pour $U(t, x)$) : les dérivées croisées sont égales, autrement dit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) (t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) (t, x).$$

Question III-6.

Etablir alors l'équation différentielle vérifiée par la tension $U(t, x)$.

La solution de cette équation différentielle est souvent prise sous la forme suivante :

$$U(t, x) = U_d \cos(\omega t - kx) + U_i \cos(\omega t + kx + \phi),$$

où U_d , U_i , ω , k et ϕ sont des constantes.

Question III-7.

Vérifier que cette expression est bien solution de l'équation différentielle, et préciser les conditions que cela impose sur les constantes.

Question III-8.

En vous inspirant de la solution choisie pour la tension, quelle solution proposez-vous pour le courant $I(t, x)$?

La fonction $U(t, x)$ est la somme de deux termes : l'un représente une onde qui se propage vers les x croissants, et l'autre représente une onde qui se propage vers les x décroissants.

Question III-9.

Expliquer pourquoi le terme $U_d \cos(\omega t - kx)$ représente l'onde de tension "directe", c'est-à-dire celle qui se propage vers les x croissants.

Considérons pour l'instant la seule onde "directe", tant pour le courant que pour la tension. Nous faisons l'hypothèse que ces grandeurs "directes" vérifient à elles seules les équations (1) et (2).

Question III–10.

Dans ce cas particulier, prouver que le rapport entre la tension "directe" et le courant "direct" reste parfaitement constant, et déterminer cette constante en fonction des paramètres de la ligne.

Dans la suite, cette constante sera notée Z_C , et appelée *impédance caractéristique*.

Question III–11.

En considérant cette fois les ondes "indirectes", c'est à dire celles qui se propagent dans le sens des x décroissants, et dans l'hypothèse où ces grandeurs "indirectes" vérifient à elles seules les équations (1) et (2), montrer que le rapport de la tension sur le courant reste constant, mais égal à $-Z_C$.

Nous admettrons que les deux résultats précédent restent valables lorsque l'onde comporte à la fois un terme "direct" et un terme "indirect", ce qui fait que le courant peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I(t, x) = \frac{U_d}{Z_C} \cos(\omega t - kx) - \frac{U_i}{Z_C} \cos(\omega t + kx + \psi),$$

où ψ est une constante. Nous nous intéressons désormais à ce qui se passe en bout de ligne, lorsqu'une résistance est branchée sur la ligne. Pour simplifier les expressions, l'extrémité de la ligne est choisi en $x = 0$, et la résistance de charge est notée R_C . Les constantes ϕ et ψ pourront dans ces conditions être choisies nulles.

Question III–12.

Au niveau de la charge, en $x = 0$, la loi d'Ohm est bien sûr vérifiée ; comment pouvez-vous l'écrire ?

Question III–13.

A partir de cette loi d'Ohm et des résultats précédents, établir l'expression du *coefficient de réflexion* $\eta = \frac{U_i}{U_d}$, en fonction notamment de Z_C et de R_C .

Les candidats en difficulté pourront continuer en admettant le résultat : $\eta = \frac{R_C - Z_C}{R_C + Z_C}$.

Question III–14.

Identifiez 3 valeurs particulières de R_C qui conduisent à des valeurs remarquables du coefficient de réflexion ; résumez dans un tableau ces valeurs de R_C , les valeurs correspondantes de η et la signification physique associée.

Pour une ligne réelle, le modèle n'est pas aussi simple car il faut tenir compte des pertes. Celles-ci peuvent être de deux natures différentes :

- des pertes résistives le long de la ligne, qui peuvent être modélisées par une résistance linéique ρ , exprimée en $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$;
- des pertes liées à une mauvaise isolation entre les deux conducteurs, et modélisées par une conductance linéique γ , exprimée en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Dans ce cas, la tension n'est plus purement sinusoïdale mais elle est amortie de façon exponentielle. L'expression de l'onde de tension est par exemple :

$$U(t, x) = \{U_d \cos(\omega t - kx) + U_i \cos(\omega t + kx + \phi)\} \cdot e^{-\alpha x},$$

où α est le coefficient qui va nous intéresser désormais, dénommé *coefficient d'atténuation*. Il est alors possible de montrer, sans que cela soit demandé ici, que les coefficients α et k sont reliés aux paramètres de la ligne par :

$$(\alpha + jk)^2 = (\rho + j\Lambda\omega) \cdot (\gamma + j\Gamma\omega),$$

où j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, dénommé ainsi en électricité car la lettre i est réservée pour désigner le courant.

Question III–15.

En développant les deux membres de cette dernière équation, construire un système de deux équations, toutes deux réelles et faisant chacune intervenir α et k .

Question III–16.

Compte tenu du fait que ρ , γ et α sont trois grandeurs "infinitement petites", indiquer quelles approximations pertinentes nous pouvons faire.

Question III–17.

En déduire les expressions approchées de k et du coefficient d'atténuation α en fonction des paramètres de la ligne.

Question III–18.

Montrer, en considérant que ρ et γ sont fixés, que le minimum d'atténuation est atteint pour la condition suivante : $\rho\Gamma = \gamma\Lambda$.

Si k est une fonction linéaire de ω , la ligne est dite *non dispersive*, c'est à dire que les différentes pulsations s'y propagent toutes à la même vitesse, évitant ainsi une déformation des signaux lorsqu'ils ne sont pas sinusoïdaux.

Question III–19.

Comparer, du point de vue de la dispersion, le cas d'une ligne sans perte et celui d'une ligne à faibles pertes.

Pour un câble coaxial du type de ceux que vous avez pu manipuler en travaux pratiques, nous pouvons négliger les pertes, surtout compte tenu de la faible longueur utilisée. Les seuls paramètres pertinents sont donc $\Lambda = 250 \text{ nH} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\Gamma = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$.

Question III–20.

Sachant que la vitesse de propagation de l'onde le long du câble est donnée par $v = \frac{\omega}{k}$, déterminer un ordre de grandeur de la vitesse de l'onde électrique dans un tel câble, et commenter la valeur obtenue.

Quatrième partie

Un film comme au cinéma

Pendant ses vacances, Sophia a enfin pour objectif de voir tous les films intéressants sortis ces derniers mois. Cette dernière partie porte sur les conditions pour que l'image obtenue sur l'écran soit nette. Le projecteur utilisé sera simplifié à l'extrême : nous l'assimilerons à une lentille mince, convergente, de distance focale $f' = +100$ mm. Cette lentille a pour objet la pellicule, que nous situerons en $x = 0$ par convention. L'écran, sur lequel se forme l'image, est situé à une distance fixe de la pellicule, en $x = x_D$. Enfin, la position de la lentille sera repérée par l'abscisse $x = x_L$, avec $L \in [0; x_D]$. Cette position peut être réglée par le projectionniste pour améliorer la netteté.

On rappelle la loi de conjugaison d'une lentille mince, qui relie la position de l'objet à celle de l'image :

$$\frac{1}{L_o} + \frac{1}{L_i} = \frac{1}{f'}$$

où :

- L_o est la distance entre l'objet et la lentille ;
- L_i est la distance entre la lentille et l'image ;
- f' est la distance focale de la lentille utilisée.

Question IV-1.

| Exprimer L_i et L_o en fonction des données du problème.

Question IV-2.

| Etablir alors, à partir de la loi de conjugaison, l'équation que doit vérifier x_L pour que l'image projetée sur l'écran soit nette.

Question IV-3.

| Montrer que résoudre cette équation revient à trouver les solutions d'un trinôme en x_L , dont on précisera les coefficients.

Question IV-4.

| A quelle(s) condition(s) l'opérateur peut-il régler la netteté sur l'écran ?

Question IV-5.

| Lorsqu'elle existe, montrer que la solution pour l'opérateur est finalement unique, compte tenu de l'intervalle des valeurs possibles pour x_L , et donner l'expression correspondante.

Question IV-6.

| En vous basant sur les dimensions d'une salle de cinéma, donner un ordre de grandeur de x_L , et commenter la valeur obtenue.

Le grandissement, noté γ , est une grandeur algébrique qui exprime le rapport entre la taille de l'image et celle de l'objet. Dans notre situation, il s'exprime par : $\gamma = -\frac{L_i}{L_o}$.

Question IV-7.

| Commentez le signe "-" dans cette définition.

Question IV-8.

| Donner l'expression littérale, sans approximation, du grandissement.

Les candidats en difficulté pourront continuer en admettant le résultat :

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 - \frac{4f'}{x_D}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4f'}{x_D}} - 1}, \text{ lorsque } x_D > 4f'.$$

Question IV-9.

| Exprimer les limites de γ lorsque $x_D \rightarrow 4f'$ et lorsque $x_D \rightarrow +\infty$, et commenter les valeurs obtenues.

Question IV-10.

| En procédant par étapes, donner un équivalent de γ lorsque $x_D \rightarrow +\infty$.

Question IV-11.

| Toujours pour une salle de cinéma, quel est l'ordre de grandeur du grandissement ?

Fin de l'énoncé
