ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION – SESSION 2012

Filière BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Cachan, Lyon et Paris

Durée : 4 heures

L'usage de toute calculatrice est interdit.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet porte sur les équations de Lotka-Volterra dites "proies-prédateurs", utilisées en dynamique des populations.

Il comporte une partie préliminaire suivie de 4 parties présentées par ordre croissant de difficulté. Les résultats prouvés dans la partie préliminaire seront utilisés dans la première et la deuxième partie. La quatrième partie utilise des résultats de la troisième partie. En dehors de cela, les parties sont indépendantes.

Il est recommandé de lire attentivement et patiemment le sujet. Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Notations

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, celui des nombres réels positifs $\mathbb{R}^+$ et l'ensemble des vecteurs de dimension 3 à coefficients réels est noté $\mathbb{R}^3$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des vecteurs de dimension 3 à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}^3$ et celui des matrices carrées de dimension 3 à coefficients complexes est noté $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Si $z \in \mathbb{C}$, $Re(z)$ désigne sa partie réelle, $Im(z)$ sa partie imaginaire, $\overline{z} = Re(z) - iIm(z)$ son conjugué et $|z|$ son module.

Pour un vecteur $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, $\|X\|$ désigne la norme euclidienne de X : $\|X\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$. Si on se donne trois vecteurs $A \in \mathbb{C}^3$, $B \in \mathbb{C}^3$ et $C \in \mathbb{C}^3$, alors $\big(A\big|B\big|C\big)$ désignera la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont la première colonne est A, la seconde B et la troisième C.

On dira que P est un polynôme réel de degré 3 si on peut écrire $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a_0, a_1, a_2 et a_3 sont des nombres réels, avec $a_3 \neq 0$. On dira que P est de coefficient dominant 1 si $a_3 = 1$. On dira que λ est une racine réelle de P si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(\lambda) = 0$.

Pour une fonction de trois variables $F(u, v, w)$ dérivable, $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v, w)$ désigne la valeur en (u, v, w) de la dérivée partielle de F par rapport à u. On définit de même $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v, w)$ et $\frac{\partial F}{\partial w}(u, v, w)$.

Enfin, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ (respectivement $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$) désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) continues sur $\mathbb{R}^+$, dérivables et dont les dérivées sont continues.

Préliminaires

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Le but de ces préliminaires est d'étudier les propriétés de la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = bx - a \ln x$.

1) Étudier les variations de f. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Montrer que pour tout $y > f(\frac{a}{b})$, l'équation $f(x) = y$ admet deux solutions distinctes $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. Que peut-on dire quand $y = f(a/b)$?

Première partie : Équation de Lotka-Volterra classique

Cette première partie est consacrée à l'étude de l'équation de Lotka-Volterra, donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} u'(t) & = & \alpha u(t) & - & \beta u(t)v(t), \\ v'(t) & = & \gamma u(t)v(t) & - & \delta v(t). \end{array} \right. \tag{1}$$

où α, β, γ et δ sont des constantes réelles strictement positives. L'origine de ce modèle sera discutée dans les questions **14., 15.** et **16.** à la fin de cette partie.

On admettra par la suite que si l'on se donne deux réels positifs $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$, il existe un **unique** couple $(u, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ satisfaisant (1) pour tout $t \in (0, +\infty)$ tel que $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $u(t) > 0$ et $v(t) > 0$ pour tout $t > 0$. On fixera par la suite $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ et on considèrera la solution (u, v) associée. On notera dans toute cette partie

$$u^* = \frac{\delta}{\gamma} \text{ et } v^* = \frac{\alpha}{\beta}.$$

et on pose pour tout $t > 0$

$$\mathcal{E}(t) = \gamma u(t) - \delta \ln u(t) + \beta v(t) - \alpha \ln v(t).$$

3) Montrer en utilisant la question **1.** que si $u(0) \neq u^*$ et $v(0) \neq v^*$, alors

$$\mathcal{E}(0) > \gamma u^* - \delta \ln u^* + \beta v^* - \alpha \ln v^*.$$

4) Montrer que $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$ pour tout $t > 0$.

5) Montrer que s'il existe $t > 0$ tel que $u(t) = u^*$ et $v(t) = v^*$, alors $u(0) = u^*$ et $v(0) = v^*$.

6) Montrer qu'il existe une constant $M > 0$ telle que si $|u(t)| > M$ ou $|v(t)| > M$, alors $\mathcal{E}(t) > \mathcal{E}(0)$. En déduire que u et v sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

On suppose dans les questions **7.**, **8.**, **9.** et **10.** que $v(0) = v^*$ et $0 < u(0) < u^*$.

7) On suppose dans cette question que $v(t) < v^*$ pour tout $t > 0$.

a) Montrer que u est croissante en t et admet une limite finie quand $t \to +\infty$. On note $u_\infty = \lim_{t \to +\infty} u(t)$.

b) On suppose que $u_\infty \leqslant u^*$. Montrer que v admet une limite finie quand $t \to +\infty$. Montrer qu'il existe $T > 0$ et $m > 0$ tels que $u'(t) \geqslant m$ pour tout $t \geqslant T$. En déduire une contradiction.

c) On suppose que $u_\infty > u^*$. Montrer qu'il existe $\tau > 0$ tel que $t \mapsto v(t)$ est croissante sur $[\tau, +\infty)$. En déduire une contradiction en vous inspirant du **7.*b*)**.

8) Déduire de la question **7.*b*)** qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $v(t_0) = v^*$. Expliquer pourquoi on peut supposer que $v(t) < v^*$ pour tout $t \in (0, t_0)$. Montrer que $u(t_0) > u(0)$.

9) Expliquer comment prouver qu'il existe $T > t_0$ tel que $v(T) = v^*$ et $u(T) < u(t_0)$.

10) A l'aide de la question **2.**, montrer que $u(0) = u(T)$.

11) Montrer que les fonctions u et v sont $T-$périodiques, c'est-à-dire que $u(t+T) = u(t)$ et $v(t+T) = v(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pourra poser $u_1(t) = u(t+T)$, $v_1(t) = v(t+T)$ et identifier une équation satisfaite par (u_1, v_1).

12) Montrer en utilisant l'équation (1) que

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds = u^* \text{ et } \frac{1}{T}\int_0^T v(s)ds = v^*.$$

Que représentent ces deux intégrales ? Qu'y a-t-il de particulièrement notable dans ces égalités ?

L'équation (1) a été introduite par Volterra après la première guerre mondiale afin de comprendre la dynamique des populations de sardines et de requins en mer Adriatique. Volterra cherchait notamment à comprendre pourquoi les quantités de sardines pêchées après l'interruption dûe à la guerre n'étaient plus aussi importantes qu'auparavant alors qu'à l'inverse la proportion observée de requins avait augmenté.

Dans l'équation (1), u représente la densité de proies (les sardines), v la densité de prédateurs (les requins), α le taux de croissance par individus des proies, δ le taux de mortalité par individus des prédateurs, β le taux de prédation et $e = \gamma/\beta$ le paramètre d'efficacité de la conversion de nourriture en croissance.

13) Commenter brièvement ces différentes dénominations. Quelles sont les hypothèses cruciales sur lesquelles repose ce modèle ?

14) Comment répercuter la baisse d'intensité de la pêche dans l'équation (1) ?

15) En vous appuyant sur les questions **12.**, **13.** et **14.**, montrer que l'équation (1) donne une explication aux observations de Volterra.

16) Calculer la solution de (1) quand $v(0) = 0$ et $u(0) > 0$. Ce type de solution vous semble-t-il réaliste ? Discuter de même le cas où $u(0) = 0$ et $v(0) > 0$.

Deuxième partie : Équation avec croissance logistique des proies

On s'intéresse dans cette partie à une variante de l'équation (1) :

$$\begin{cases} u'(t) &= \alpha u(t)(1 - \frac{u(t)}{K}) &- \beta u(t)v(t), \\ v'(t) &= \gamma u(t)v(t) &- \delta v(t). \end{cases} \tag{2}$$

où α, β, γ, δ et K sont des constantes réelles strictement positives.

17) Soit $u(0) \in (0, K)$ et $v(0) = 0$. Vérifier que dans ce cas une solution de (2) est donnée pour tout $t > 0$ par $v(t) = 0$ et

$$u(t) = \frac{Ku(0)}{u(0) + (K - u(0))e^{-\alpha t}}.$$

18) Tracer approximativement le graphe de la fonction u définie dans la question précédente.

19) Cette solution vous semble-t-elle plus réaliste que celle de la question **16.** ? Que représente la constante $K > 0$ dans ce modèle ?

On supposera dans toute la suite du problème que $K = 1$ afin de simplifier les calculs.

On admettra par la suite que si l'on se donne deux réels positifs $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$, il existe un unique couple $(u, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ satisfaisant (2) pour tout $t \in (0, +\infty)$ tel que $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $u(t) > 0$ et $v(t) > 0$ pour tout $t > 0$. On fixera par la suite $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ et on considèrera la solution (u, v) associée. On notera dans toute cette partie :

$$u^* = \frac{\delta}{\gamma} \text{ et } v^* = \frac{\alpha}{\beta}(1 - u^*)$$

et pour tout $t > 0$

$$\mathcal{F}(t) = \gamma\Big(u(t) - u^* - u^* \ln \frac{u(t)}{u^*}\Big) + \beta\Big(v(t) - v^* - v^* \ln \frac{v(t)}{v^*}\Big).$$

20) Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = -\alpha\gamma\big(u(t) - u^*\big)^2.$$

21) Montrer que $\mathcal{F}(t) \geqslant 0$ pour tout $t > 0$.

22) Montrer que la fonction $t \mapsto \mathcal{F}(t)$ converge quand $t \to +\infty$. On note $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_\infty$.

23) Montrer que les fonctions u et v sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

24) On suppose dans cette question ainsi que dans la question **25.** qu'il existe une suite $(t_n)_n$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et telle que les suites $\big(u(t_n)\big)_n$ et $\big(v(t_n)\big)_n$ convergent. On note $u_\infty = \lim_{n\to+\infty} u(t_n)$ et $v_\infty = \lim_{n\to+\infty} v(t_n)$.

a) Montrer que $u_\infty > 0$ et $v_\infty > 0$. On pourra commencer par calculer $\mathcal{F}_\infty$.

On définit $(\tilde{u}, \tilde{v})$ la solution de l'équation (2) avec données initiales $\tilde{u}(0) = u_\infty$ et $\tilde{v}(0) = v_\infty$. On admettra que pour tout $t > 0$:

$$\tilde{u}(t) = \lim_{n\to+\infty} u(t + t_n) \text{ et } \tilde{v}(t) = \lim_{n\to+\infty} v(t + t_n).$$

b) Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{F}_\infty = \gamma\Big(\tilde{u}(t) - u^* - u^* \ln \frac{\tilde{u}(t)}{u^*}\Big) + \beta\Big(\tilde{v}(t) - v^* - v^* \ln \frac{\tilde{v}(t)}{v^*}\Big).$$

c) En déduire que $0 = -\alpha\gamma|\tilde{u}(t) - u^*|^2$. Conclure que $u_\infty = u^*$.

On admettra qu'on peut déduire de la question **24.** que $u(t) \to u^*$ quand $t \to +\infty$.

25) On suppose dans cette question que $|v_\infty - v^*| = \epsilon_0 > 0$.

a) Montrer que v' est bornée.

b) En déduire qu'on peut construire une constante $\tau > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $t > 0$, s'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $t \in [t_n - \tau, t_n + \tau]$, alors $|v(t) - v^*| > \epsilon_0/2$.

c) Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que si $t > T$, alors $u(t) > u^*/2$ et

$$|\alpha u(t)\big(1 - u(t)\big) - \beta u(t)v^*| < \frac{1}{8}\beta u^* \epsilon_0.$$

d) Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u'(t_n + t)| > \frac{1}{8}\beta u^* \epsilon_0$ si $n \geqslant n_1$ et $t \in [-\tau, \tau]$.

e) Montrer que $|u(t_n + \tau) - u(t_n)| > \frac{1}{8}\beta \epsilon_0 u^* \tau$ pour tout $n \geqslant n_1$.

f) En déduire qu'une telle suite $(t_n)_n$ n'existe pas.

On admettra qu'on peut déduire de la question **25.** que $v(t)$ converge vers v^* quand $t \to +\infty$.

26) Commenter les résultats obtenus dans cette partie, en les comparant notamment avec les résultats obtenus dans la partie précédente.

Troisième partie : Polynôme de degré 3 à coefficients positifs

On considère dans cette partie un polynôme réel de degré 3

$$P(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

avec $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$. Le but de cette partie est de déterminer le signe des parties réelles des racines de P.

27) Montrer qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ telle que $P(\lambda_1) = 0$.

28) Montrer que $\lambda_1 < 0$.

29) Montrer que si $P'(\lambda_1) = 0$, alors il existe $\mu > 0$ tel que $P(x) = (x - \lambda_1)^2(x - \mu)$.

30) On suppose dans cette question uniquement que $a_2^2 < 3a_1$. Étudier les variations de P et montrer que λ_1 est la seule racine réelle de P, c'est-à-dire que $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \lambda_1$.

On supposera par la suite que λ_1 est la seule racine réelle de P et que $P'(\lambda_1) \neq 0$. On ne fait par contre plus nécessairement l'hypothèse que $a_2^2 < 3a_1$.

31) Expliquer pourquoi on peut écrire P sous la forme

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \overline{\lambda_2}),$$

où $\lambda_2 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

32) Montrer que

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 2Re(\lambda_2) & = & a_2, \\ 2\lambda_1 Re(\lambda_2) + |\lambda_2|^2 & = & a_1, \\ -\lambda_1 |\lambda_2|^2 & = & a_0. \end{cases}$$

33) Montrer que $Re(\lambda_2)$ et $a_0 - a_1 a_2$ ont même signe.

Quatrième partie : Équation à trois populations

Cette dernière partie est consacrée à l'équation :

$$\left\{\begin{array}{rclcl} u'(t) & = & \alpha u(t)(1-u) & - & \beta u(t)v(t), \\ v'(t) & = & \gamma u(t)v(t) & - & \delta v(t)w(t), \\ w'(t) & = & \epsilon v(t)w(t) & - & w(t), \end{array}\right. \tag{3}$$

où α, β, γ, δ et ϵ sont des constantes réelles strictement positives telles que $\beta < \alpha\epsilon$.

34) Expliquer brièvement ce que modélise cette équation et sur quelles hypothèses elle repose.

35) Montrer qu'il existe une unique solution $(u^*, v^*, w^*) \in \mathbb{R}^3$ de

$$\left\{\begin{array}{rclcl} 0 & = & \alpha u^*(1-u^*) & - & \beta u^* v^*, \\ 0 & = & \gamma u^* v^* & - & \delta v^* w^*, \\ 0 & = & \epsilon v^* w^* & - & w^*, \end{array}\right. \tag{4}$$

telle que $0 < u^* < 1$, $v^* > 0$ et $w^* > 0$.

On introduit la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha u(1-u) - \beta uv \\ \gamma uv - \delta vw \\ \epsilon vw - w \end{pmatrix}.$$

Soit M la matrice définie par

$$M = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u^*, v^*, w^*) \Big| \ \frac{\partial F}{\partial v}(u^*, v^*, w^*) \Big| \ \frac{\partial F}{\partial w}(u^*, v^*, w^*) \right).$$

36) Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha u^* & -\beta u^* & 0 \\ \gamma v^* & 0 & -\delta v^* \\ 0 & \epsilon w^* & 0 \end{pmatrix}.$$

37) On considère dans cette question $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de M et $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$.

a) Montrer que $\lambda \neq 0$.

b) Exprimer x_1 et x_3 en fonction de x_2, u^*, λ, α, β, γ, δ et ϵ. Montrer que $x_2 \neq 0$.

38) Construire un polynôme P_M de degré 3 et de coefficient dominant 1 tel que λ est une valeur propre de M si et seulement si $P_M(\lambda) = 0$.

On écrira par la suite P_M sous la forme :

$$P_M(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

39) En utilisant les résultats de la troisième partie, montrer que si λ est une valeur propre de M, alors $Re(\lambda) < 0$.

On supposera par la suite que

$$\epsilon(\alpha^2 - 3\gamma) < \beta(\alpha + 3\gamma).$$

40) Montrer en utilisant la question **30.** que le polynôme P_M admet une unique racine réelle.

41) Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ s'écrivant

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, ainsi qu'une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M = Q^{-1}DQ$.

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle

$$U'(t) = MU(t) \tag{5}$$

et on considère $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ une solution de cette équation définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

42) Expliquer brièvement pourquoi, si $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ sont proches de u^*, v^* et w^* respectivement, alors l'équation (5) constitue une bonne approximation de l'équation (3).

43) On pose $V(t) = QU(t) \in \mathbb{C}^3$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, où $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ a été défini à la question **41.**

a) Quelle équation satisfait V ?

b) Calculer $V(t)$ en fonction des coordonnées de $V(0) \in \mathbb{R}^3$, de λ_1 et de λ_2.

c) Montrer que $\|V(t)\| \to 0$ quand $t \to +\infty$.

d) En déduire que $\|U(t)\| \to 0$ quand $t \to +\infty$.

44) Expliquer comment on pourrait prouver le résultat suivant : *il existe* $\eta > 0$ *tel que si* $(u, v, w) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ *est une solution de (3) telle que* $|u(0) - u^*|^2 + |v(0) - v^*|^2 + |w(0) - w^*|^2 < \eta$, *alors* $\lim_{t\to+\infty} u(t) = u^*$, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = v^*$ *et* $\lim_{t\to+\infty} w(t) = w^*$.

$\star \quad \star$
$\star$