ÉPREUVE ECRITE D'INFORMATIQUE-MATHEMATIQUES
ENS :PARIS LYON CACHAN
MEMBRES DE JURY : M. GLISSE, X. GOAOC, A. SIEGEL

Le sujet visait à étudier les propriétés de différentes classes de langage, en particulier du point de vue de leur entropie. Le concept d'entropie est transversal à différents domaines des mathématiques et de l'informatique. Il cherche à mesurer la régularité de suites ou plus généralement de systèmes dynamiques. L'objectif du sujet était d'amener les candidats au calcul effectif de cette entropie pour différentes familles de langages. Pour cela, il fallait s'appuyer sur différents concepts issus des mathématiques discrètes (graphes, langages, combinatoire), ainsi que sur des connaissances en algèbre linéaire. Maitriser les interprétations géométriques des concepts d'algèbre linéaire permettait d'aborder la partie 2 de manière beaucoup plus aisée.

Le nombre de candidats qui se sont présentés à l'épreuve était de 255.

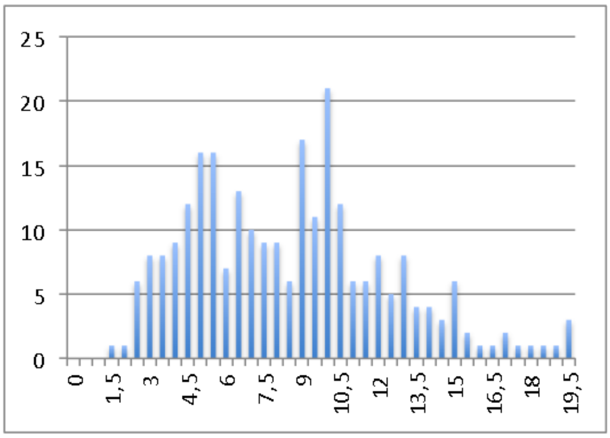
La partie 1 visait à introduire le concept de fonction de récurrence et à vérifier la rigueur des candidats lors de démonstrations faisant appel à des récurrences. Cette partie a été traitée par tous les candidats. Le jury a été intransigeant vis-à-vis de la qualité de la rédaction des réponses. Par exemple, 91 (sur 255) candidats ont répondu parfaitement à la question 1.1, et 45 candidats seulement ont traité parfaitement la question 1.2. Dans l'ensemble, le barème adopté pour cette partie a fortement pénalisé les candidats non rigoureux.

La partie 2 visait à démontrer une version restreinte du théorème de Perron-Frobenius. Volontairement, la démonstration se limitait à la dimension 2 pour se concentrer sur l'interprétation géométrique des objets algébriques considérés. Les principales difficultés résidaient dans la question 2.4 - qui visait à obtenir une estimation globale du comportement des coefficients de la matrice - et la question 2.6 - où était prouvé le théorème de Perron-Frobenius. Tous les candidats ont traité au moins une question de cette partie. Cependant, certaines questions ont été très peu abordées, en particulier les question 2.4.a, 2.4.b et 2.4.c (pour lesquelles seule une cinquantaine de candidats a proposé un élément de réponse valable) et la question 2.6.b. Les candidats qui ont pris le temps d'aborder ces questions délicates en proposant des éléments de réponse, même incomplets, ont été largement favorisés par le barème. Au contraire, le jury a observé que certains candidats ont répondu aux questions les plus simples (2.2.a, 2.2.b, 2.2.c, 2.5.a) en délaissant toutes les autres questions, et en privilégiant les parties suivantes. Cette stratégie s'est avérée largement insuffisante pour obtenir une note globale permettant de passer les barres d'admissibilité.

La partie 3 visait à appliquer le Théorème de Perron-Frobenius dans le but de calculer l'entropie de langages définis par des graphes. Cette partie demandait une maîtrise des outils liés aux suites, aux graphes, à l'algèbre polynomiale. La grande majorité des candidats a abordé cette partie, en particulier jusqu'à la question 3.5. Les questions 3.4, 3.6 et 3.7 correspondaient à des applications synthétisant les résultats des sections et questions précédentes. Une trentaine de candidats y ont apporté des éléments de réponse.

La partie 4 visait à appliquer le théorème de Perron-Frobenius sur une autre famille de langages, c'est-à-dire ceux engendrés par des règles de transformation itératives. Cette partie nécessitait de manipuler des ensembles de mots finis et des transformations sur ces ensembles, en combinant des intuitions combinatoires et algébriques. L'objectif final de cette partie était de montrer que le concept d'entropie permet de distinguer les deux classes de langages introduites dans ce sujet. Cette partie a été abordée par une cinquantaine de candidats.

Enfin, la partie 5 visait à illustrer la difficulté pour passer de la classification "grossière" d'une fonction de complexité (sous-linéaire ou exponentielle) à une estimation fine de cette fonction de complexité. Pour cela, il fallait s'appuyer sur des études combinatoires fines. Cette partie a été abordé par une petite



dizaine de candidats. Notablement, deux candidats sont parvenus à proposer des éléments de réponse à toutes les questions.

La notation a bien entendu tenu compte de la longueur du sujet vis-à-vis du temps imparti. Les notes se sont étalées en 0.5 et 20. Un premier groupe de candidats a répondu globalement aux questions faciles de chaque partie. Comme à l'accoutumée, cette stratégie de grapillage n'a pas été suffisante pour passer la barre d'admissibilité. Cependant, les candidats qui n'ont pas fait preuve de précision sur les questions faciles ont été lourdement sanctionnés. Un deuxième groupe de candidats a cherché à répondre aux questions plus techniques, en faisant des propositions constructives. Dans ce groupe, le jury a privilégié les éléments de réponses rigoureux et concis.

Commentaires détaillés

Les paragraphes suivants commentent les réponses données aux questions les plus traitées. Globalement, le jury a noté de nombreuses confusions entre suites et séries, termes et facteurs... ce qui est regrettable.

Questions 1.1 et 1.2. Ces questions visaient à tester la rigueur des candidats. Les justifications trop rapides n'ont pas été considérées comme correctes. Dans l'esprit du sujet, la fonction de complexité n'était pas définie pour $n = 0$. Pour les candidats qui ont cependant proposé une valeur pour $f(0)$, les réponses $f(0) = 0$ et $f(0) = 1$ ont été considérées comme correctes.

Question 1.4.a. Deux types de réponses étaient attendus : une réponse "intuitive" ("ensemble des mots ne contenant pas 22"), suivie d'une caractérisation formelle à l'aide d'un langage.

Question 1.4.a. Le jury a noté de nombreuses erreurs lors des calculs de matrice de passage lors de la diagonalisation de la matrice considérée.

Question 1.4.c. Nous avons noté un abus des notations par équivalents $\simeq$, avec des confusions associées et des preuves trop rapides. Cela est malheureux.

Question 2.1. Question de cours visant à tester la rigueur des candidats.

Question 2.2.b. Les réponses sur cette question simple ont été globalement très inégales, avec certaines réponses très farfelues.

Question 2.2.c. Un certain nombre de candidats ont montré que "le calcul de la fonction $f(t)$ qu'ils ont proposé est unique", plutôt que de montrer l'unicité de f indépendamment de la forme de cette fonction. Un grand nombre de candidats ont fait une erreur dans le calcul du polynôme caractéristique de la matrice (oubliant le ad dans le terme constant) : précisons que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas égal à bc.

Question 2.4. Dans cette question réside l'argument principal du théorème de Perron-Frobenius. Chaque sous-question était assez technique. Tous les candidats qui ont tenté d'y répondre, même sans arriver au bout des calculs, ont été récompensés par le barème.

Question 2.5. Question où on attendait une réponse rigoureuse. De trop nombreux candidats n'ont pas répondu à la question 2.5.b.

Question 3.1.b. Il s'agissait d'une des seules questions du sujet faisant appel à des quantificateurs. Toutes les réponses approximatives ("la fonction est décroissante") ont été considérées comme non valables.

Question 3.2. Un grand nombre de candidat a oublié de justifier que $\log f_{\mathcal{G}}(n)$ est bien défini. Certaines copies ont indiqué que $x + y \leqslant xy$ pour $x, y \geqslant 1$.

Question 3.4. Il y avait une incertitude sur la lecture du sujet : $\log \frac{3}{2}$ ou $(\log 3)/2$. C'était le premier cas qui était attendu mais les candidats ayant répondu correctement à la question pour le second cas n'ont pas été sanctionnés.

Question 3.6. Certaines réponses très farfelues sont apparues ici, telles que "$\sqrt{2} * [[0,1][1,0]]$ est une matrice irréductible donc matrice d'adjacence d'un graphe fortement connexe", ou "$X^2 - 2$ admet une seule racine".

Partie 1 :

Question 1.1. On appelle *graphe complet sur r lettres* le graphe de sommets $\mathcal{A} = \{1, \ldots, r\}$ dont l'ensemble d'arêtes est égal à $\mathcal{E} = \mathcal{A}^2$. Donner, en la justifiant, la fonction de complexité du graphe complet sur r lettres.

Réponse. Puisque $\mathcal{E} = \mathcal{A}^2$, pour tout paire de sommets (i, j), il existe une arête de cible i et de source j. On montre par récurrence que la fonction de complexité est égale à $f_{\mathcal{G}}(n) = r^n$ pour $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, on a déjà vu que $f_{\mathcal{G}}(1) = r$. Pour $n = 2$, il y a exactement r^2 manières de connecter un sommet i à un sommet j par une seule arête, ce qui implique que $f_{\mathcal{G}}(2) = r^2$. Chaque chemin de longueur n admet exactement r extensions de longueur $n + 1$, ce qui implique que $f_{\mathcal{G}}(n + 1) = r f_{\mathcal{G}}(n)$. □

Question 1.2. Soit $\mathcal{G}$ un graphe à r sommets $\mathcal{A} = \{1, 2 \ldots, r\}$ et tel que tout sommet est la source d'exactement k arêtes. Quelle est la fonction de complexité de ce graphe ? Le justifier.

Réponse. Puisqu'il y a exactement k arêtes sortant de chaque noeud, on a $f_{\mathcal{G}}(n + 1) = k f_{\mathcal{G}}(n)$. On sait aussi que $f_{\mathcal{G}}(1) = r$. Une récurrence permet de conclure que $f_{\mathcal{G}}(n) = r k^{n-1}$. □

Question 1.3. Soit $\mathcal{G}$ un graphe à r sommets $\mathcal{A} = \{1, 2 \ldots, r\}$, et $\mathbf{M}$ sa matrice d'adjacence.

(a). Montrer que le nombre de chemins de longueur $k \geqslant 1$ dans le graphe d'un sommet i à un sommet j est égal à $(\mathbf{M}^k)_{i,j}$, le coefficient d'indice (i, j) de la k-ème puissance de la matrice d'adjacence du graphe.

(b). En déduire que :

$$f_{\mathcal{G}}(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} (\mathbf{M}^{n-1})_{i,j}.$$

(c). Exprimer le nombre de cycles de longueur n dans le graphe $\mathcal{G}$ en fonction des coefficients des puissances de $\mathbf{M}$.

Réponse.

(a). Si $k = 1$, le nombre de chemins de longueur 1 d'un sommet i à un sommet j est exactement égal à $(\mathbf{M})_{i,j}$, la propriété est donc vrai. Supposons qu'elle est vérifiée au rang k. Soit i, j deux sommets du graphe. Tout chemin de longueur $k+1$ se décompose en un chemin de longueur k de i à un sommet i_1, suivi d'une arête de i_1 à j. On a donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\{\text{chemin de } i \text{ à } j \text{ de longueur } k\} &= \sum_{i_1=1}^{r} \operatorname{card}\{\text{chemin de } i \text{ à } i_1\} \times \operatorname{card}\{\text{arêtes de } i_1 \text{ à } j\}. \\
&= \sum_{i_1=1}^{r} (\mathbf{M}^k)_{i,i_1} (\mathbf{M})_{i_1,j} \\
&= (\mathbf{M}^{k+1})_{i,j}
\end{aligned}$$

(b). Se déduit du fait que $f_{\mathcal{G}}(n)$ comptabilise l'ensemble des chemins de longueur $n-1$.

(c). Puisque les cycles sont définis comme une sous-famille de chemins, ils admettent une source et une cible. En particulier, deux cycles avec le même support mais deux sources différentes sont considérés comme distincts. On peut donc appliquer (a), pour déduire que le nombre de chemins de longueur n joignant un sommet i à lui même est égal à $(\mathbf{M}^n)_{i,i}$. Le nombre total de cycles de longueur n est donc égal à $\operatorname{Tr} \mathbf{M}^n$.

□

Question 1.4. On considère le graphe présenté dans la Figure 1.

(a). Donner, en le justifiant, le langage de ce graphe.

(b). Soient $\lambda > 1$ et $\mu < 1$ les valeurs propres de la matrice d'adjacence $\mathbf{M}$ de ce graphe. Montrer que

$$f_{\mathcal{G}}(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^{n+2} - \mu^{n+2}).$$

(c). En déduire que la suite $(\frac{1}{n} \log f_{\mathcal{G}}(n))_{n \geqslant 1}$ admet une limite, et expliciter cette limite.

Réponse.

(a). Le graphe reconnait tous les chemins qui ne passent jamais deux fois de suite par 2. Plus formellement, le langage du graphe est l'ensemble des mots sur $\{1,2\}$ qui ne contiennent aucun motif 22. Il peut aussi être décrit par l'expression régulière $(1^*(21)^*)^*\{\varepsilon, 2\}$.

(b). On diagonalise $\mathbf{M}$ après calcul de ses vecteurs propres $\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mu\\1\end{pmatrix}$. Les valeurs propres λ et μ vérifient $\lambda^2 = \lambda + 1$ et $\mu^2 = \mu + 1$. On en déduit que

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda^{n+1} - \mu^{n+1} & \lambda^n - \mu^n\\ \lambda^n - \mu^n & \lambda^{n-1} - \mu^{n-1}\end{pmatrix}.$$

En utilisant les relations de récurrence vérifiées par les puissances de λ et μ, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
f_{\mathcal{G}}(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^n - \mu^n + 2(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}) + \lambda^{n-2} - \mu^{n-2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^n + \lambda^{n-1} + \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu^n + \mu^{n-1} + \mu^{n-1} + \mu^{n-2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^{n+1} + \lambda^n) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu^{n+1} + \mu^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^{n+2} - \mu^{n+2}).
\end{aligned}$$

(c). Par définition, $f_{\mathcal{G}}(n)$ est un entier positif non nul pour $n \geqslant 1$ et son log est bien défini. On a $\log f_{\mathcal{G}}(n) - \log \lambda^{n+2} = -\log\sqrt{5} + \log \frac{\lambda^{n+2} - \mu^{n+2}}{\lambda^{n+2}} = -\log\sqrt{5} + \log(1 + (\frac{\mu}{\lambda})^{n+2}) \to -\log\sqrt{5}$ puisque $|\mu| < 1$ et $\lambda > 1$. On a donc $\lim \frac{1}{n}\log f_{\mathcal{G}}(n) = \lim \frac{-\log\sqrt{5}}{n} + \lim \frac{\log \lambda^{n+2}}{n} = \lim \frac{n+2}{n}\log\lambda = \log(\lambda)$. □

Partie 2 :

Question 2.1. Montrer qu'un graphe est fortement connexe si et seulement si sa matrice d'adjacence est irréductible.

Réponse. Soit r la taille de la matrice et $1 \leqslant i, j \leqslant r$ deux sommets du graphe. Le coefficient $(\mathbf{M}_{\mathcal{G}}^n)_{i,j}$ est égal au nombre de chemins de i à j. Si le graphe est fortement connexe, il existe un chemin du sommet i au sommet j. Si n désigne sa longueur, on a donc $(\mathbf{M}_{\mathcal{G}}^n)_{i,j} > 0$. Comme il s'agit d'un entier, on en déduit que $(\mathbf{M}_{\mathcal{G}}^n)_{i,j} \geqslant 1$. Ceci étant vrai pour tout couple (i,j), $\mathbf{M}$ est irréductible. Réciproquement, si $\mathbf{M}_{\mathcal{G}}$ est irréductible, pour tout couple (i,j), il existe n tel que $(\mathbf{M}_{\mathcal{G}}{}_{i,j}^{n}) > 0$ ce qui prouve l'existence d'un chemin entre les sommets i et j.

Question 2.2.

(a). Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice irréductible à coefficients positifs ou nuls. Montrer que $b > 0$ et $c > 0$.

(b). Montrer que $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_1$ ne sont pas des vecteurs propres de $\mathbf{M}$.

(c). Soit $t \in [0,1]$ fixé. Montrer qu'il existe un unique $f(t) \in [0,1]$ tel que $\frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_t}{||\mathbf{M}\mathbf{v}_t||} = \mathbf{v}_{f(t)}$.

Réponse.

(a). Si $b = 0$ ou $c = 0$, la matrice est triangulaire et un des coefficients de ses puissances est toujours nul.

(b). $\mathbf{M}\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puisque $b > 0$.

(c). $||\mathbf{M}\mathbf{v}_t|| \geqslant (1-t)b + tc > 0$ selon (a). De plus, $\mathbf{M}\mathbf{v}_t \in \mathbb{H}$ puisque $\mathbf{M}$ est à coefficients positifs. On peut donc en déduire que $||\frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_t}{||\mathbf{M}\mathbf{v}_t||}|| = 1$. On montre aussi que les vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{H}$ sont tous les $\mathbf{v}_t$ pour $t \in [0,1]$. Il existe donc au moins un t tel que ce vecteur soit égal à $\mathbf{v}_{f(t)}$. L'unicité découle de la forme des vecteurs $\mathbf{v}_t$.

Question 2.3.

(a). Montrer qu'il existe t_0 tel que $\frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_{t_0}}{||\mathbf{M}\mathbf{v}_{t_0}||} = \mathbf{v}_{t_0}$. En déduire que $\mathbf{v}_{t_0}$ est un vecteur propre de $\mathbf{M}$ à coordonnées strictement positives.

(b). On note $\lambda_{\mathbf{M}}$ la valeur propre de $\mathbf{M}$ associée au vecteur propre $\mathbf{v}_{t_0}$. Montrer que $\lambda_{\mathbf{M}}$ est une racine simple du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}$.

Réponse.

On montre d'abord que la fonction $f(t)$ est continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, puisqu'il s'agit d'une projection de la première coordonnée $\frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_t}{||\mathbf{M}\mathbf{v}_t||}$. De plus, puisque $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_1$ ne sont pas des vecteurs propres, on sait que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires, $f - Id$ s'annule au moins une fois, et $\mathbf{v}_{t_0}$ vérifie bien les conditions.
Si le sous-espace propre de $\mathbf{v}_{t_0}$ n'était pas de dimension 1, il serait de dimension 2 et $\mathbf{M}$ serait une homothétie, donc non irréductible. De plus, un calcul du discriminant montre que ses deux racines ne peuvent être égales, sans quoi b ou c seraient nuls. □

Question 2.4.

(a). Montrer qu'il existe deux constantes $c_0, d_0 > 0$ telles que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$c_0 \left(\lambda_{\mathbf{M}}\right)^n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} (\mathbf{M}^n)_{i,j} \leqslant d_0 \left(\lambda_{\mathbf{M}}\right)^n.$$

(b). Soit μ une autre valeur propre de $\mathbf{M}$. En comparant $|\mu|^n$ et $d_0(\lambda_{\mathbf{M}})^n$, montrer que $|\mu| \leqslant \lambda_{\mathbf{M}}$.

(c). Soit $\mathbf{w}$ un vecteur propre de $\mathbf{M}$ avec des coefficients strictement positifs. Montrer qu'il est proportionnel à $\mathbf{v}_{\mathbf{t_0}}$.

Réponse.

(a). Soit m_0 le minimum des coordonnées de $\mathbf{v}_{t_0}$ et M_0 leur maximum. Comme les coordonnées sont toutes positives, on sait que m_0 et M_0 sont strictement positifs. De plus, de la relation $\mathbf{M}^n\mathbf{v}_{t_0} = \lambda_{\mathbf{M}}^n\mathbf{v}_{t_0}$ on déduit que $m_0\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}(\mathbf{M}^n)_{i,j} \leqslant 2M_0\lambda_{\mathbf{M}}^n$ et $2m_0\lambda_{\mathbf{M}}^n \leqslant M_0\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}(\mathbf{M}^n)_{i,j}$.

(b). Soit $\mathbf{w}$ un vecteur propre pour μ. Puisque $\mathbf{M}^n\mathbf{w} = \mu^n\mathbf{w}$, on obtient que

$$\begin{aligned} |\mu|^n||\mathbf{w}|| &= ||\mathbf{M}^n\mathbf{w}|| \\ &\leqslant \max\{|w_i|\}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}(\mathbf{M}^n)_{i,j} \\ &\leqslant \max\{|w_i|\}\, d_0{\lambda_{\mathbf{M}}}^n \\ &\leqslant ||\mathbf{w}||d_0{\lambda_{\mathbf{M}}}^n. \end{aligned}$$

La relation précédente est vraie pour toute n. On peut donc passer à la limite de $|\mu| \leqslant d_0^{1/n}|\lambda_{\mathbf{M}}|$.

(c). Si $\mathbf{w}$ est un vecteur propre à coefficients positifs, comme la matrice $\mathbf{M}$ est à coefficients positifs, le vecteur propre μ associé est positif. De plus, la relation de la question (a) est vérifiée par μ puisque la seule hypothèse utilisée pour la démontrer est la positivité des coefficients. La question (c) implique donc que $\mu \leqslant \lambda_{\mathbf{M}}$ et $\lambda_{\mathbf{M}} \leqslant \mu$. Comme le sous-espace associé à $\lambda_{\mathbf{M}}$ est de dimension 1, les deux vecteurs $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v_{t_0}}$ sont proportionnels.

□

Partie 3 :

Question 3.1.

(a). Une matrice primitive est-elle irréductible ? Justifier la réponse.

(b). Une matrice irréductible est-elle primitive ? Justifier la réponse.

Réponse. Toute matrice primitive est irréductible, ce qui se justifie par l'interversion de quantificateurs dans la définition. La réciproque est fausse : la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est bien irréductible (son carré est égal à l'identité) mais pas primitive.

Question 3.2. On suppose que $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ est une matrice primitive à coefficients entiers positifs ou nuls. On note $\lambda_{\mathbf{M}}$ la valeur propre de Perron-Frobenius de $\mathbf{M}$.

(a). Soit μ la deuxième racine du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}$. Montrer que μ est une valeur propre réelle de $\mathbf{M}$ et que $|\mu| < \lambda_{\mathbf{M}}$.

(b). Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ un vecteur non nul. En étudiant la projection de $\mathbf{v}$ sur le sous-espace propre associé à λ, montrer que la suite $(\lambda_{\mathbf{M}})^{-n}\,\mathbf{M}^n\mathbf{v}$ converge vers un vecteur non nul que l'on explicitera.

Réponse.

(a). Puisque la matrice est de taille 2 et à coefficients entiers, puisque $\mathbf{M}$ admet une valeur propre réelle simple, la deuxième racine de son polynôme caractéristique est une valeur propre simple réelle. Si $|\mu| = \lambda_{\mathbf{M}}$, comme $\mathbf{M}$ n'est pas une homothétie, on a $\mu = -\lambda$. Ainsi, $\mu + \lambda = a + d = 0$, ce qui implique que $a = d = 0$. La matrice n'est donc pas primitive.

(b). $\lambda_{\mathbf{M}}$ est une valeur propre simple de la matrice $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}$ est diagonalisable selon (a). Soit $\mathbf{v}_\lambda$ et $\mathbf{v}_\mu$ deux vecteurs propres de $\mathbf{M}$. On a alors $\mathbf{v} = x_\lambda\mathbf{v}_\lambda + x_\mu\mathbf{v}_\mu$. Si $x_\lambda = 0$, on a $\mathbf{v} = x_\mu\mathbf{v}_\mu$. Puisque $\mathbf{M}$ est primitive, il existe k tel que les coefficients de $\mathbf{w} = \mathbf{M}^k\mathbf{v}$ sont tous strictement positifs. Or, par construction, on a $\mathbf{M}\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$. Il s'agit donc d'un vecteur propre de $\mathbf{M}$ strictement positif. La question 2.4.(c) permet de conclure que $\mathbf{w}$ est colinéaire à $\mathbf{v}_\lambda$, ce qui est impossible.
Soit $\mathbf{v}_n = \frac{1}{{\lambda_{\mathbf{M}}}^n}\mathbf{M}^n\mathbf{v} = x_\lambda\mathbf{v}_\lambda + \frac{\mu^n}{\lambda^n}x_\mu\mathbf{v}_\mu$. Cette suite converge vers $x_\lambda\mathbf{v}_\lambda$ qui est non nul.

□

Question 3.3. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs ou nuls tels que $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour tous $m, n \geqslant 1$.

(a). Montrer que pour tous $k, m \in \mathbb{N}^*$, et tout $j \in \mathbb{N}$ avec $j < k$, on a

$$\frac{a_{mk+j}}{mk+j} \leqslant \frac{a_k}{k} + \frac{a_1}{m}.$$

(b). Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\inf\{\frac{a_n}{n},\ n \geqslant 1\}$.

Réponse.

(a). Par la sous-additivité de a_n, pour tout $0 \leqslant j < k$ et $m > 0$, on a

$$\frac{a_{mk+j}}{mk+j} \leqslant \frac{a_{mk}}{mk} + \frac{a_j}{mk} \leqslant \frac{ma_k}{mk} + \frac{ja_1}{mk} \leqslant \frac{a_k}{k} + \frac{a_1}{m}$$

(b). Soit $\alpha = \inf\{\frac{a_n}{n},\ n \geqslant 1\}$. On a $\frac{a_n}{n} \geqslant \alpha$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k tel que $\frac{a_k}{k} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que :

$$\frac{a_{mk+j}}{mk+j} \leqslant \frac{a_k}{k} + \frac{a_1}{m} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_1}{m}.$$

Pour m assez grand, on en déduit donc que $\frac{a_{mk+j}}{mk+j} \leqslant \alpha + \varepsilon$ et cette suite admet bien une limite.

□

Question 3.4. Soit $\mathcal{G}$ un graphe fortement connexe et $f_{\mathcal{G}}$ sa fonction de complexité.

(a). Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\log f_{\mathcal{G}}(n))_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite.

(b). Que vaut cette limite pour un graphe complet sur deux sommets ?

(c). Que vaut cette limite dans le cas du graphe de Fibonacci décrit dans la Figure 1 ?

Réponse. $f_{\mathcal{G}}(n)$ est non nul puisque le graphe n'est pas acyclique. On a $f_{\mathcal{G}}(n+m+1) \leqslant f_{\mathcal{G}}(n+1)f_{\mathcal{G}}(m+1)$ puisque tout chemin de longueur $n+m$ se décompose en un chemin de longueur n et un chemin de longueur m. Puisque $f_{\mathcal{G}}(n) \geqslant 2$ pour $n \geqslant 2$, la suite $(\log f_{\mathcal{G}}(n+1))_{n\geqslant 1}$ vérifie donc les hypothèses de sous-additivité de la question 3.1, si bien que $(\frac{1}{n}\log f_{\mathcal{G}}(n+1))_{n\geqslant 1}$ admet une limite. On en déduit que $(\frac{1}{n}\log f_{\mathcal{G}}(n))_{n\geqslant 1}$ admet elle aussi une limite. Selon la partie 1, les limites demandées dans les questions (b) et (c) valent 1 et $\log\lambda$. □

Question 3.5. Soit G un graphe fortement connexe sur deux sommets. Soit $\lambda_{\mathcal{G}}$ la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$. Monter que l'entropie de $\mathcal{G}$ est égale à $\log\lambda_{\mathcal{G}}$.

Réponse. Puisque le graphe est fortement connexe, sa matrice d'adjacence est irréductible (question 2.1) et on peut appliquer le théorème de Perron-Frobenius en dimension 2. Selon (1.3.b) et (2.4.a), on a $c_0\lambda_{\mathcal{G}}^n \leqslant f_{\mathcal{G}}(n+1) \leqslant d_0\lambda_{\mathcal{G}}^n$. On obtient le résultat souhaité en passant cette relation au log puis en prenant la limite. Une preuve alternative consistait à énumérer toutes les matrices de graphes fortement connexe sur deux sommets et de vérifier cette propriété au cas par cas. □

Question 3.6. Le nombre $\log 3/2$ est-il l'entropie d'un graphe fortement connexe ? Donner une justification.

Réponse. Si x est l'entropie d'un graphe fortement connexe, alors $\lambda = \exp(x)$ est la valeur propre dominante d'une matrice irréductible à coefficients entiers et positifs. De ce fait, λ est la racine d'un polynôme à coefficients entiers et dont le coefficient dominant est égal à 1.
Si $3/2$ est la racine de $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ avec a_i entiers, alors $3^n = 2^n(a_{n-1}\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{3}{2} + a_0)$ est un nombre pair, ce qui est impossible. □

Question 3.7. Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice irréductible et inversible, à coefficients entiers positifs ou nuls. On associe à $\mathbf{M}$ une matrice carrée à coefficients dans $\{0, 1\}$ de taille $a + b + c + d$ comme suit :

$$\mathbf{N} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \longleftarrow a \longrightarrow & \longleftarrow b \longrightarrow & \longleftarrow c \longrightarrow & \longleftarrow d \longrightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ a \\ \downarrow \\ \uparrow \\ b \\ \downarrow \\ \uparrow \\ c \\ \downarrow \\ \uparrow \\ d \\ \downarrow \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \end{array}$$

(a). Montrer que $\mathbf{N}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe fortement connexe.

(b). Soit (λ_1, λ_2) un vecteur propre de $\mathbf{M}$. Construire un vecteur propre de $\mathbf{N}$ pour la même valeur propre.

(c). Montrer que les valeurs propres non nulles de $\mathbf{N}$ sont celles de $\mathbf{M}$.

Réponse.

(a). On peut remarquer que $\mathbf{N}$ est primitive puisque $\mathbf{N}^2$ a des entrées toutes positives.

(b). Si (λ_1, λ_2) est un vecteur propre de $\mathbf{M}$ pour une valeur propre α non nulle, alors $(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{a+b}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{c+d})$ est un vecteur propre de $\mathbf{N}$ pour la même valeur propre.

(c). Puisque $\mathbf{M}$ est irréductible, on sait que b et c sont non nuls (question 2.2.a). Il y a donc exactement deux colonnes distinctes dans la matrice $\mathbf{N}$. On en déduit que son rang est égal à 2. Son noyau est donc de dimension $a+b+c+d-2$. Puisque $\mathbf{M}$ est supposée inversible, elle admet deux vecteurs propres indépendants (λ_1, λ_2), ce qui permet de construire deux vecteurs propres indépendants pour $\mathbf{N}$, dont on a déjà vu qu'elle était de rang 2. Ainsi, les valeurs propres non nulles de $\mathbf{N}$ sont celles de $\mathbf{M}$. $\square$

Question 3.8. Construisez un graphe fortement connexe qui admet $\log \sqrt{2}$ pour entropie.

Réponse. $\sqrt{2}$ est la valeur propre dominante de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cependant, l'entropie d'un graphe provient d'une matrice dont les coefficients ne contient que des 0 et des 1. Pour construire un graphe correct correspondant, la construction précédente nous indique que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un bon candidat. On vérifie que cette matrice est irréductible en calculant $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}^2$, que son polynôme caractéristique est bien $X^3(X^2 - 2)$ et on construit un graphe ayant cette matrice pour matrice d'adjacence. $\square$

Question 3.9.

(a). Construisez un graphe fortement connexe qui admet $\log(3 - \sqrt{2})$ pour entropie.

(b). Ce graphe est-il unique ?

Réponse. $\log(3 - \sqrt{2})$ ne peut pas être l'entropie d'un graphe fortement connexe : dans ce cas, $3 - \sqrt{2}$ serait valeur propre dominante d'une matrice à coefficients entiers, et $3 + \sqrt{2}$ serait aussi une valeur propre de la matrice qui dominerait $3 - \sqrt{2}$ en module. $\square$

Partie 4 :

Question 4.1. Soit $n > 0$ et p un entier tel que

$$\min\{|\sigma^{p-1}(1)|, |\sigma^{p-1}(2)|\} \leqslant n < \min\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\}.$$

(a). Montrer que $\mathcal{L}(q) \subset \mathcal{L}(q+1)$ pour tout entier $q \geqslant 1$.

(b). Montrer que pour tout $w \in \mathcal{L}$ de longueur n, il existe $a, b \in \{1, 2\}$ tel que w est un facteur de $\sigma^p(ab)$.

(c). Montrer que $f_{\mathcal{L}}(n) \leqslant 8 \max\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\}$, où $f_{\mathcal{L}}$ désigne la fonction de complexité de $\mathcal{L}$.

Réponse.

(a). Soit $W \in \mathcal{L}(n)$. Il existe deux mots V_1, V_2 tels que $\sigma^p(1) = V_1 W V_2$. Puisque $\sigma(1)$ commence par 1, on sait que $\sigma^{p+1}(1)$ commence par $\sigma^p(1)$, c'est-à-dire par $V_1 W V_2$. Ceci montre que W est aussi un facteur de de $\sigma^{p+1}(1)$.

(b). Si $W \in \mathcal{L}$, il existe q tel que W est un facteur de $\sigma^q(1)$. Ce dernier mot s'écrit $\sigma^q(1) = \sigma^p(V)$ avec $V = \sigma^{q-p}(1) = v_1 \ldots v_n$. Tous les mots $\sigma^p(v_i)$ sont de longueur supérieure à n, donc à $|W|$. Ainsi, soit W est un facteur de $\sigma^p(v_i)$, soit il est à cheval sur $\sigma^p(v_i)$ et $\sigma^p(v_{i+1})$.

(c). Il y a quatre possibilités pour le mot ab tel que $|\sigma^p(ab)|$ contient W. Chacun de ces mots $|\sigma^p(ab)|$ a une longueur inférieure à $2 \max\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|$. □

Question 4.2. On suppose que la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ est primitive.

(a). Soit V un mot sur l'alphabet $\{1, 2\}^*$ et $\mathbf{l}(V)$ le vecteur qui comptabilise les nombres de 1 et 2 dans le mot V. Montrer que $\mathbf{l}(\sigma(V)) = \mathbf{M}_\sigma \mathbf{l}(V)$.

(b). Exprimer la longueur du mot $|\sigma^n(1)|$ en fonction de $\mathbf{M}_\sigma$.

(c). En utilisant le théorème de Perron-Frobenius, montrer qu'il existe $\lambda > 0$ et deux constantes $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout entier p assez grand,

$$\alpha \lambda^p \leqslant \min\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\} \leqslant \max\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\} \leqslant \beta \lambda^p.$$

Réponse.

(a). Si $\mathbf{l}(V) = (v_1, v_2)$ et $\mathbf{M}_\sigma = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$, on sait que $\sigma(V)$ contient v_1 fois $\sigma(1)$ et v_2 fois $\sigma(2)$. Le nombre de 1 dans $\sigma(V)$ est donc $v_1 m_{1,1} + v_2 m_{1,2}$ et le nombre de 2 est égal à $v_1 m_{2,1} + v_2 m_{2,2}$, ce qui correspond à $\mathbf{M}_\sigma \mathbf{l}(V)$.

(b). Les différentes occurrences de lettres dans $\sigma^n(1)$ sont donc comptabilisées dans le vecteur $\mathbf{l}(\sigma^n(1)) = \mathbf{M}_\sigma{}^n \mathbf{l}(1) = \mathbf{M}_\sigma{}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La longueur de $\sigma^n(1)$ est la somme des coefficients de ce vecteur, c'est-à-dire le produit scalaire $\begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_\sigma{}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c). On a vu que la suite $\frac{1}{\lambda^n} \mathbf{M}_\sigma{}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ converge vers un vecteur $\mathbf{v}$ non nul à coordonnées positives. Le produit scalaire $\frac{1}{\lambda^n} \begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_\sigma{}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ converge donc vers $\begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}$ qui est non nul. Ceci fournit un encadrement pour $|\sigma^p(1)|$ à partir d'un certain rang. Le même raisonnement s'applique pour $|\sigma^p(2)|$. □

Question 4.3.

(a). Montrer que la fonction de complexité du langage d'une substitution primitive sur deux lettres vérifie $f_{\mathcal{L}}(n) \leqslant K n$ avec $K > 0$.

(b). En déduire que $\lim \frac{1}{n} \log f_{\mathcal{L}}(n)$ existe et donner sa valeur.

Réponse. Soit n un entier et p tel que $\min\{|\sigma^{p-1}(1)|, |\sigma^{p-1}(2)|\} \leqslant n < \min\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\}$. On a déjà vu que $f_{\mathcal{L}}(n) < 8 \max\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\}$. On en déduit que $f_{\mathcal{L}}(n) < 8\beta\lambda^p$. De plus, $\lambda^{p-1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \min\{|\sigma^{p-1}(1)|, |\sigma^{p-1}(2)|\} \leqslant \frac{n}{\alpha}$. Ceci implique que $p_{\mathcal{L}}(n) < 8 \frac{\beta\lambda}{\alpha} n$. L'entropie est donc nulle. □

Question 4.4. Soit $n > 0$. Montrer que le langage d'un graphe sur n sommets dont la matrice d'adjacence est primitive et inversible ne peut pas être égal au langage d'une substitution primitive sur n lettres.

Réponse. Si la matrice d'adjacence du graphe est inversible, toutes ses valeurs propres sont non nulles. Si son langage est engendré par une substitution primitive, son entropie est nulle. Ainsi, la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence du graphe est égale à 1. Par primitivité de la matrice d'adjacence du graphe, ses autres valeurs propres μ vérifient $0 < \mu < 1$. On en déduit que le déterminant de la matrice est non nul et strictement inférieur à 1. Il ne peut pas s'agir d'un nombre entier, ce qui est impossible. □

Partie 5 :

Question 5.1. Soit un mot $W \in \mathcal{L}$. Montrer que W s'écrit sous la forme

$$W = A\sigma(V)B \quad \text{où}$$

- $V \in \mathcal{L}$,
- Il existe deux lettres $V_I, V_F \in \{1,2\}$ qui étendent V en un mot $V_I V V_F \in \mathcal{L}$,
- A est un suffixe strict de $\sigma(V_I)$,
- B est un préfixe strict de $\sigma(V_F)$.

Réponse. Soit $W \in \mathcal{L}$. Par construction, il existe n tel que W est un facteur de $\sigma^n(1)$. Si W est un préfixe ou un suffixe de $\sigma^n(1)$, il s'agit aussi d'un facteur, ni préfixe, ni suffixe, de $\sigma^{n+3}(1)$. Soit $\sigma^{n-1}(1) = v_1 \dots v_m$. Puisque W est un facteur non préfixe ou suffixe de $\sigma(v_1 \dots v_m)$, il existe $k > 1$ et $l < n$ tels que $\sigma(v_k \dots v_l)$ est un facteur de W. On considère k minimal et l maximal pour cette propriété. Soit $V = v_k \dots v_l$. Puisque $k > 1$, on pose $V_I = v_{k-1}$ et on définit A comme le plus court suffixe U de $\sigma(V_I)$ tel que $U\sigma(V)$ est un facteur de W. Puisque $l < n$, on pose $V_F = v_{l+1}$ et on définit B comme le plus court préfixe U de $\sigma(V_F)$ tel que $\sigma(V)U$ est un facteur de W. □

Question 5.2. Soit $W \in \mathcal{L}$ un mot de longueur au moins 5.

(a). Montrer que W admet comme facteur le mot 11 ou le mot 22.

(b). Montrer l'unicité du triplet (A, V, B) introduit à la question 5.1 pour décomposer W.

Réponse.

(a). Si W n'admet ni 11, ni 22 pour facteur, comme il est de longueur au moins 5, il ne peut s'agir que de 12121 ou 21212. Selon la question précédente, il existe un autre mot $V_I V V_L \in \mathcal{L}$ tel que W est un facteur de $\sigma(V_I V V_L)$. Les seules possibilités pour $V_I V V_L$ sont 111 ou 222. Si on suppose de même que 111 ou 222 appartiennent à $\mathcal{L}$, on pourrait à nouveau les décomposer et faire apparaitre $\sigma(1)$ ou $\sigma(2)$ dans ces mots, ce qui n'est pas le cas.

(b). Soit $W \in \mathcal{L}$. Supposons que W admet 11 pour facteur et soit k le plus petit rang tel que $w_k w_{k+1} = 11$. Ecrivons $W = A_1\sigma(V_1)B_1 = A_2\sigma(V_2)B_2$. Puisque 11 n'est pas l'image de 1 ou de 2, et que les images de lettres sont toutes deux de longueur 2, on en déduit que A_1 (respectivement A_2) est non vide si et seulement si k est pair. Ceci implique que $A_1 = A_2$. De même, puisque B_1 et B_2 sont de longueur 0 ou 1 et que $\sigma(V_1)$ et $\sigma(V_2)$ sont de longueurs paires, on a $B_2 = B_1$. On se ramène ainsi au cas où $\sigma(V_1) = \sigma(V_2)$. puisque σ est injective, on en déduit que $V_1 = V_2$.

Si W admet 22 pour facteur, un raisonnement semblable s'applique.

□

Question 5.3. Soit $f_{\mathcal{L}}$ la fonction de complexité de $\mathcal{L}$. Soit $n > 0$.

(a). Montrer que $f_{\mathcal{L}}(1) = 2$ et $f_{\mathcal{L}}(2) = 4$.

(b). Soit $p_0(n)$ l'ensemble des éléments $W \in \mathcal{L}$ de longueur n dont la décomposition introduite à la question 5.1 est de la forme $W = \sigma(V)$ ou $W = \sigma(V)B$. Montrer que pour tout entier n, on a $p_0(2n) = f_{\mathcal{L}}(n)$ et $p_0(2n+1) = f_{\mathcal{L}}(n+1)$.

(c). Soit $p_1(n)$ l'ensemble des éléments $W \in \mathcal{L}$ de longueur n dont la décomposition introduite à la question 5.1 est de la forme $W = A\sigma(V)$ ou $W = A\sigma(V)B$, avec $A \neq \varepsilon$. Exprimer $p_1(2n)$ et $p_1(2n+1)$ en fonction de $f_{\mathcal{L}}(n)$ et $f_{\mathcal{L}}(n+1)$.

Réponse.

(a). Puisque $\sigma^2(1) = 1221$ et $\sigma^2(2) = 2112$, $\mathcal{L}$ contient tous les mots possibles de longueur 1 et 2, à savoir $\{1, 2, 11, 12, 21, 22\}$.

(b). Si W est de longueur paire, alors $W = \sigma(V)$ et tout élément V de longueur n va engendrer un W convenable. On a donc $p_0(2n) = f_{\mathcal{L}}(n)$. Si W est de longueur impaire, alors $W = \sigma(V)B$, où B est un préfixe de longueur 1 de V_L avec $VV_L \in \mathcal{L}$. Il y a donc une bijection entre les mots W de longueur $2n+1$ dans cette famille et les mots de longueur $n+1$ dans $\mathcal{L}$. Ainsi, $p_0(2n+1) = f_{\mathcal{L}}(n+1)$.

(c). Avec un raisonnement similaire on montre que $p_1(2n) = p_1(2n+1) = f_{\mathcal{L}}(n+1)$.

□

Question 5.4. Soit $f_{\mathcal{L}}$ la fonction de complexité de $\mathcal{L}$. Soit $n > 0$.

(a). Montrer que si $n \geqslant 3$, alors n se décompose sous la forme $n = 2^r + q + 1$ avec $r \geqslant 0$ et $0 < q \leqslant 2^r$. Montrer que cette décomposition est unique.

(b). Montrer que pour tout entier qui se décompose sous la forme $n = 2^r + q + 1$, on a

$$f_{\mathcal{L}}(n) = \begin{cases} 6 \cdot 2^{r-1} + 4q & \text{si } 0 < q \leqslant 2^{r-1} \\ 8 \cdot 2^{r-1} + 2q & \text{si } 2^{r-1} < q \leqslant 2^r \end{cases}.$$

(c). En déduire que $f_{\mathcal{L}}(n) \leqslant 4n$ pour tout entier n.

Réponse.

(a). On choisit le plus grand r tel que $n - 2 > 2^r$ et on pose $q = n - 2^r - 1$. L'unicité se dérive naturellement.

(b). On montre avec les relations de la question précédente que $f_{\mathcal{L}}(2n) = f_{\mathcal{L}}(n) + f_{\mathcal{L}}(n+1)$ et $f_{\mathcal{L}}(2n+1) = 2f_{\mathcal{L}}(n+1)$. Or, la suite introduite dans l'énoncé vérifie la même relation de récurrence pour $n \geqslant 3$ et a la même valeur initiale pour $n = 3$.

(c). Si $q \leqslant 2^{r-1}$ on a $f_{\mathcal{L}}(n) = 6 \cdot 2^{r-1} + 4q \leqslant 6\, 2^{r-1} + 2q + 2\, 2^{r-1} \leqslant 4(2^r + q) \leqslant 4(n-1) \leqslant 4n$. Sinon, on a $f_{\mathcal{L}}(n) = 8 \cdot 2^{r-1} + 2q \leqslant 6 \leqslant 4(2^r + q) \leqslant 4(n-1) \leqslant 4n$.

□