ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2013 **FILIÈRE MP – CONCOURS INFO**

COMPOSITION D'INFORMATIQUE-MATHÉMATIQUES – (ULC)

(Durée : 4 heures)

Les calculatrices sont interdites.

La rigueur et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de chaque question, en particulier celles faisant intervenir des quantificateurs et des récurrences.

Ce sujet comprend 7 pages numérotées de 1 à 7.

⋆ ⋆ ⋆

Quelques exemples de calculs d'entropie de langages

Nous allons étudier les langages associés à deux classes d'objets discrets : les langages reconnus par un graphe, et les langages construits à partir de l'itération de règles de réécriture appelées substitutions. Dans les deux cas, nous allons estimer le taux de croissance de la fonction qui comptabilise le nombre d'éléments du langage ayant une longueur donnée. Pour cela, il faudra prouver l'existence et calculer l'*entropie* du langage.

Dans la première partie, nous introduirons le concept de *fonction de complexité* pour le langage reconnu par un graphe.

Dans une deuxième partie, nous démontrerons une version restreinte du *théorème de Perron-Frobenius*. Il s'agira de comprendre comment le quadrant positif d'un espace euclidien est transformé par l'action d'une matrice à coefficients positifs. Nous nous limiterons volontairement au cas des matrices carrées de taille 2.

Dans la troisième partie, nous utiliserons le théorème de Perron-Frobenius pour montrer que la fonction de complexité du langage reconnu par un graphe fortement connexe croît exponentiellement vite. Dans la quatrième partie, nous montrerons, au contraire, que la fonction de complexité du langage associé à une substitution est plutôt de nature linéaire. Dans la dernière partie, nous majorerons plus finement le taux de croissance linéaire d'une substitution donnée.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 dépend des parties 1 et 2. La partie 4 dépend de la partie 2. La partie 5 dépend de la partie 4.

Préambule

Si $\mathbf{M}$ est une matrice, $(\mathbf{M})_{i,j}$ désigne le coefficient d'indice (i, j) de $\mathbf{M}$, où i indique la ligne correspondante de la matrice et j sa colonne.

La notation log désigne la fonction logarithme en base 2.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini non vide. $\mathcal{A}^*$ désigne l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathcal{A}$, qui sont appelées *mots* sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Les mots finis non vides sont indexés à partir de 1, ils sont de la forme $w = (w_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, où $w_k \in \mathcal{A}$. On les notera $w = w_1 \dots w_n$. L'entier n est alors la *longueur* du mot, notée $|w|$. L'unique mot de longueur 0, appelé mot vide, est noté ε. On conviendra que la notation $w_1 \dots w_n$ dénote ε lorsque $n = 0$. Si $w = w_1 \dots w_n$ est un mot, tout sous-mot de w constitué de lettres consécutives — de la forme $w_k \dots w_{k+p}$ — est appelé *facteur* de w. Tout début de w, de la forme $w_1 \dots w_p$, est appelé *préfixe* de w. Toute fin de w, de la forme $w_p \dots w_n$, est appelée *suffixe* de w. Le mot vide ε est donc un facteur, un préfixe et un suffixe de tout mot fini.

Un *langage* est une partie de $\mathcal{A}^*$. La *fonction de complexité* $f_{\mathcal{L}}$ d'un langage $\mathcal{L}$ comptabilise le nombre d'éléments de longueur n dans $\mathcal{L}$:

$$f_{\mathcal{L}}(n) = \text{card}\,(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}^n) = \text{card}\,\{w \in \mathcal{L},\, |w| = n\}.$$

Partie 1 : Complexité et récurrence

Un *graphe orienté fini* $\mathcal{G}$ est la donnée d'un ensemble fini de sommets $\mathcal{A} = \{1, 2 \dots, r\}$, et d'un ensemble fini d'arêtes $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}^2$. En particulier, tout sommet i d'un graphe peut avoir une arête le joignant à lui-même. On supposera dans la suite qu'un graphe a au moins 2 sommets, c'est-à-dire $r \geqslant 2$. On désigne par $\phi, \psi : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ les deux applications qui associent respectivement à toute arête sa source et sa cible : ϕ associe à l'arête (i, j) le sommet i, et ψ lui associe le sommet j. La *matrice d'adjacence* du graphe $\mathcal{G}$ est la matrice carrée $\mathbf{M}$ de taille r telle que $(\mathbf{M})_{i,j} = 1$ si et seulement si le couple (i, j) est dans $\mathcal{E}$; autrement dit, si et seulement s'il existe une arête e de source i ($\phi(e) = i$) et de cible j ($\psi(e) = j$).

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Un *chemin de longueur k de source i et de cible j* est une suite $(e_1, ..., e_k)$ d'arêtes, telles que $\phi(e_1) = s$, $\psi(e_t) = \phi(e_{t+1})$ pour tout $1 \leqslant t < k$ et $\psi(e_k) = j$. En particulier, un chemin peut passer plusieurs fois par une même source ou une même arête. Un graphe est dit *fortement connexe* si, pour tout couple de sommets $(i, j) \in \mathcal{A}^2$, il existe un chemin de source i et de cible j.

Pour tout chemin $(e_1, ..., e_k)$ du graphe $\mathcal{G}$, on appelle *codage du chemin dans $\mathcal{A}$* le mot $\phi(e_1) \dots \phi(e_k)\psi(e_k) \in \mathcal{A}^*$. Ce mot énumère dans l'ordre les sommets parcourus par le chemin. Ainsi, un chemin de longueur k est codé par un mot de longueur $k + 1$. Un *cycle* est un chemin dont la cible est égale à la source.

Les *chemins de longueur* 0 sont tous les chemins vides associés à un sommet du graphe : ils ne parcourent aucune arête. Ils sont codés par le nom de leur sommet, et il y en a exactement r. Les *cycles de longueur 1* relient un sommet i à lui-même, et leur codage est $i\,i$.

Le *langage du graphe $\mathcal{G}$*, noté $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, est l'ensemble des codages de chemins finis de $\mathcal{G}$. La *fonction de complexité du graphe*, notée $f_{\mathcal{G}}$, est celle de son langage.

Question 1.1. On appelle *graphe complet sur r lettres* le graphe de sommets $\mathcal{A} = \{1, \dots, r\}$ dont l'ensemble d'arêtes est égal à $\mathcal{E} = \mathcal{A}^2$. Donner, en la justifiant, la fonction de complexité du graphe complet sur r lettres.

Question 1.2. Soit $\mathcal{G}$ un graphe à r sommets $\mathcal{A} = \{1, 2 \dots, r\}$ et tel que tout sommet est la source d'exactement k arêtes. Quelle est la fonction de complexité de ce graphe ? Le justifier.

Question 1.3. Soit $\mathcal{G}$ un graphe à r sommets $\mathcal{A} = \{1, 2 \dots, r\}$, et $\mathbf{M}$ sa matrice d'adjacence.

(a). Montrer que le nombre de chemins de longueur $k \geqslant 1$ dans le graphe d'un sommet i à un sommet j est égal à $(\mathbf{M}^k)_{i,j}$, le coefficient d'indice (i,j) de la k-ème puissance de la matrice d'adjacence du graphe.

(b). En déduire que :

$$f_{\mathcal{G}}(n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} (\mathbf{M}^{n-1})_{i,j}.$$

(c). Exprimer le nombre de cycles de longueur n dans le graphe $\mathcal{G}$ en fonction des coefficients des puissances de $\mathbf{M}$.

FIGURE 1 – Graphe de Fibonacci

Question 1.4. On considère le graphe présenté dans la Figure 1.

(a). Donner, en le justifiant, le langage de ce graphe.

(b). Soient $\lambda > 1$ et $\mu < 1$ les valeurs propres de la matrice d'adjacence $\mathbf{M}$ de ce graphe. Montrer que

$$f_{\mathcal{G}}(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^{n+2} - \mu^{n+2}).$$

(c). En déduire que la suite $(\frac{1}{n} \log f_{\mathcal{G}}(n))_{n \geqslant 1}$ admet une limite, et expliciter cette limite.

Partie 2 : Théorème de Perron-Frobenius en dimension 2

Une matrice $\mathbf{M}$ est *irréductible* si et seulement si pour tout couple d'indice (i,j), il existe une puissance de $\mathbf{M}$ dont le coefficient d'indice (i,j) est strictement positif.

Question 2.1. Montrer qu'un graphe est fortement connexe si et seulement si sa matrice d'adjacence est irréductible.

On note $\mathbb{H} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ le quadrant supérieur droit du plan euclidien. Le plan euclidien est muni de la norme 1 définie par $\left\| \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\| = |w_1| + |w_2|$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$.

Question 2.2.

(a). Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice irréductible à coefficients positifs ou nuls. Montrer que $b > 0$ et $c > 0$.

(b). Montrer que $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_1$ ne sont pas des vecteurs propres de $\mathbf{M}$.

(c). Soit $t \in [0,1]$ fixé. Montrer qu'il existe un unique $f(t) \in [0,1]$ tel que $\frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_t}{||\mathbf{M}\mathbf{v}_t||} = \mathbf{v}_{f(t)}$.

Question 2.3.

(a). Montrer qu'il existe t_0 tel que $\frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_{t_0}}{||\mathbf{M}\mathbf{v}_{t_0}||} = \mathbf{v}_{t_0}$. En déduire que $\mathbf{v}_{t_0}$ est un vecteur propre de $\mathbf{M}$ à coordonnées strictement positives.

(b). On note $\lambda_{\mathbf{M}}$ la valeur propre de $\mathbf{M}$ associée au vecteur propre $\mathbf{v}_{t_0}$. Montrer que $\lambda_{\mathbf{M}}$ est une racine simple du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}$.

Question 2.4.

(a). Montrer qu'il existe deux constantes $c_0, d_0 > 0$ telles que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$c_0 \, (\lambda_{\mathbf{M}})^n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} (\mathbf{M}^n)_{i,j} \leqslant d_0 \, (\lambda_{\mathbf{M}})^n.$$

(b). Soit μ une autre valeur propre de $\mathbf{M}$. En comparant $|\mu|^n$ et $d_0(\lambda_{\mathbf{M}})^n$, montrer que $|\mu| \leqslant \lambda_{\mathbf{M}}$.

(c). Soit $\mathbf{w}$ un vecteur propre de $\mathbf{M}$ avec des coefficients strictement positifs. Montrer qu'il est proportionnel à $\mathbf{v}_{\mathbf{t_0}}$.

On appelle $\lambda_{\mathbf{M}}$ la *valeur propre de Perron-Frobenius* de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{v}_\lambda$ son vecteur propre de Perron-Frobenius. Nous venons de montrer que $\lambda_{\mathbf{M}}$ domine toutes les valeurs propres en module, et que $\mathbf{v}_\lambda$ est unique à multiplication près par un scalaire. Il s'agit du *théorème de Perron-Frobenius*, qui est vrai en toute dimension finie.

Un cas particulier du théorème de Perron-Frobenius est celui des matrices dites *primitives*, c'est à dire celles qui admettent une puissance dont tous les coefficients sont strictement positifs.

Question 2.5.

(a). Une matrice primitive est-elle irréductible ? Justifier la réponse.

(b). Une matrice irréductible est-elle primitive ? Justifier la réponse.

Question 2.6. On suppose que $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice primitive à coefficients entiers positifs ou nuls. On note $\lambda_{\mathbf{M}}$ la valeur propre de Perron-Frobenius de $\mathbf{M}$.

(a). Soit μ la deuxième racine du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}$. Montrer que μ est une valeur propre réelle de $\mathbf{M}$ et que $|\mu| < \lambda_{\mathbf{M}}$.

(b). Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ un vecteur non nul. En étudiant la projection de $\mathbf{v}$ sur le sous-espace propre associé à λ, montrer que la suite $(\lambda_{\mathbf{M}})^{-n} \, \mathbf{M}^n\mathbf{v}$ converge vers un vecteur non nul que l'on explicitera.

Cette convergence des suites $(\lambda_{\mathbf{M}})^{-n} \, \mathbf{M}^n\mathbf{v}$ vers des vecteurs appartenant à une droite uniquement déterminée par la matrice est à la base de nombreuses applications algorithmiques, dont la plus fameuse est le classement de pages web par des moteurs de recherche. Dans la suite, nous allons nous concentrer sur l'application de ces résultats à l'étude des langages associés à des objets discrets.

Partie 3 : Entropie de graphe

Dans cette partie, nous allons utiliser le théorème de Perron-Frobenius pour montrer que la fonction de complexité du langage d'un graphe admet un taux de croissance exponentiel.

Question 3.1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs ou nuls tels que $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ pour tous $m, n \geqslant 1$.

(a). Montrer que pour tous $k, m \in \mathbb{N}^*$, et tout $j \in \mathbb{N}$ avec $j < k$, on a

$$\frac{a_{mk+j}}{mk+j} \leqslant \frac{a_k}{k} + \frac{a_1}{m}.$$

(b). Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\inf\left\{\frac{a_n}{n},\, n \geqslant 1\right\}$.

Question 3.2. Soit $\mathcal{G}$ un graphe fortement connexe et $f_{\mathcal{G}}$ sa fonction de complexité.

(a). Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\log f_{\mathcal{G}}(n))_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite.

(b). Que vaut cette limite pour un graphe complet sur deux sommets ?

(c). Que vaut cette limite dans le cas du graphe de Fibonacci décrit dans la Figure 1 ?

Pour un graphe $\mathcal{G}$ fortement connexe, on appelle *entropie* de $\mathcal{G}$ le taux de croissance logarithmique de la fonction de complexité de son langage :

$$\text{entropie}(\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log f_{\mathcal{G}}(n).$$

Question 3.3. Soit G un graphe fortement connexe sur deux sommets. Soit $\lambda_{\mathcal{G}}$ la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$. Monter que l'entropie de $\mathcal{G}$ est égale à $\log \lambda_{\mathcal{G}}$.

Plus généralement, on admet que l'entropie d'un graphe fortement connexe (de taille quelconque) est égale au logarithme de la valeur propre dominante de sa matrice d'adjacence.

Question 3.4. Le nombre $\log 3/2$ est-il l'entropie d'un graphe fortement connexe ? Donner une justification.

Question 3.5. Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice irréductible et inversible, à coefficients entiers positifs ou nuls. On associe à $\mathbf{M}$ une matrice carrée à coefficients dans $\{0,1\}$ de taille $a+b+c+d$ comme suit :

$$\mathbf{N} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \longleftarrow a \longrightarrow & \longleftarrow b \longrightarrow & \longleftarrow c \longrightarrow & \longleftarrow d \longrightarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ a \\ \downarrow \\ \uparrow \\ b \\ \downarrow \\ \uparrow \\ c \\ \downarrow \\ \uparrow \\ d \\ \downarrow \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1
\end{array}\right]
\end{array}$$

(a). Montrer que $\mathbf{N}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe fortement connexe.

(b). Soit (λ_1, λ_2) un vecteur propre de $\mathbf{M}$. Construire un vecteur propre de $\mathbf{N}$ pour la même valeur propre.

(c). Montrer que les valeurs propres non nulles de $\mathbf{N}$ sont celles de $\mathbf{M}$.

Question 3.6. Construisez un graphe fortement connexe qui admet $\log \sqrt{2}$ pour entropie.

Question 3.7.

(a). Construisez un graphe fortement connexe qui admet $\log(3 - \sqrt{2})$ pour entropie.

(b). Ce graphe est-il unique ?

Partie 4 : Entropie de substitution

On introduit maintenant un nouveau type de langage : celui engendré par une *substitution sur deux lettres*. Il s'agit d'une règle de transformation σ qui associe aux deux lettres 1 et 2 des mots finis non vides sur $\{1, 2\}$: $\sigma(1) = W_1$ et $\sigma(2) = W_2$. On étend σ par concaténation : $\sigma(VW) = \sigma(V)\sigma(W)$ pour tous $V, W \in \{1, 2\}^*$.

La matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ de la substitution est définie comme suit : $(\mathbf{M}_\sigma)_{i,j}$ comptabilise le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\sigma(j)$. Par exemple, la matrice d'incidence de la substitution définie par $\sigma(1) = 1222$ et $\sigma(2) = 1$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose que $\sigma(1)$ commence par 1. On note $\mathcal{L}(p)$ l'ensemble des facteurs de $\sigma^p(1)$. Le langage associé à la substitution est

$$\mathcal{L} = \bigcup_{p>0} \mathcal{L}(p).$$

Question 4.1. Soit $n > 0$ et p un entier tel que

$$\min\{|\sigma^{p-1}(1)|, |\sigma^{p-1}(2)|\} \leqslant n < \min\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\}.$$

(a). Montrer que $\mathcal{L}(q) \subset \mathcal{L}(q + 1)$ pour tout entier $q \geqslant 1$.

(b). Montrer que pour tout $w \in \mathcal{L}$ de longueur n, il existe $a, b \in \{1, 2\}$ tel que w est un facteur de $\sigma^p(ab)$.

(c). Montrer que $f_\mathcal{L}(n) \leqslant 8 \max\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\}$, où $f_\mathcal{L}$ désigne la fonction de complexité de $\mathcal{L}$.

Question 4.2. On suppose que la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ est primitive.

(a). Soit V un mot sur l'alphabet $\{1, 2\}^*$ et $\mathbf{l}(V)$ le vecteur qui comptabilise les nombres de 1 et 2 dans le mot V. Montrer que $\mathbf{l}(\sigma(V)) = \mathbf{M}_\sigma \mathbf{l}(V)$.

(b). Exprimer la longueur du mot $|\sigma^n(1)|$ en fonction de $\mathbf{M}_\sigma$.

(c). En utilisant le théorème de Perron-Frobenius, montrer qu'il existe $\lambda > 0$ et deux constantes $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout entier p assez grand,

$$\alpha\lambda^p \leqslant \min\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\} \leqslant \max\{|\sigma^p(1)|, |\sigma^p(2)|\} \leqslant \beta\lambda^p.$$

Question 4.3.

(a). Montrer que la fonction de complexité du langage d'une substitution primitive sur deux lettres vérifie $f_{\mathcal{L}}(n) \leqslant Kn$ avec $K > 0$.

(b). En déduire que $\lim \frac{1}{n} \log f_{\mathcal{L}}(n)$ existe et donner sa valeur.

Par analogie avec le cas des graphes, nous avons donc montré que l'entropie du langage associé à une substitution primitive sur deux lettres est nulle. On admet plus généralement que ce résultat est vrai pour toute substitution primitive sur n lettres.

Question 4.4. Soit $n > 0$. Montrer que le langage d'un graphe sur n sommets dont la matrice d'adjacence est primitive et inversible ne peut pas être égal au langage d'une substitution primitive sur n lettres.

Partie 5 : Fonction de complexité de la substitution de Thue-Morse

On considère maintenant la substitution définie par $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 21$. Comme dans la partie 4, on désigne par $\mathcal{L}$ le langage engendré par les facteurs des mots $\sigma^n(1)$. On sait avec la question 4.3 que la fonction de complexité $f_{\mathcal{L}}$ est majorée par une suite linéaire. Le but de cette partie va être d'estimer plus précisément le coefficient de cette suite linéaire.

Question 5.1. Soit un mot $W \in \mathcal{L}$. Montrer que W s'écrit sous la forme

$$W = A\sigma(V)B \quad \text{où}$$

- $V \in \mathcal{L}$,
- Il existe deux lettres $V_I, V_F \in \{1, 2\}$ qui étendent V en un mot $V_I V V_F \in \mathcal{L}$,
- A est un suffixe strict de $\sigma(V_I)$,
- B est un préfixe strict de $\sigma(V_F)$.

Question 5.2. Soit $W \in \mathcal{L}$ un mot de longueur au moins 5.

(a). Montrer que W admet comme facteur le mot 11 ou le mot 22.

(b). Montrer l'unicité du triplet (A, V, B) introduit à la question 5.1 pour décomposer W.

Question 5.3. Soit $f_{\mathcal{L}}$ la fonction de complexité de $\mathcal{L}$. Soit $n > 0$.

(a). Montrer que $f_{\mathcal{L}}(1) = 2$ et $f_{\mathcal{L}}(2) = 4$.

(b). Soit $p_0(n)$ l'ensemble des éléments $W \in \mathcal{L}$ de longueur n dont la décomposition introduite à la question 5.1 est de la forme $W = \sigma(V)$ ou $W = \sigma(V)B$. Montrer que pour tout entier n, on a $p_0(2n) = f_{\mathcal{L}}(n)$ et $p_0(2n + 1) = f_{\mathcal{L}}(n + 1)$.

(c). Soit $p_1(n)$ l'ensemble des éléments $W \in \mathcal{L}$ de longueur n dont la décomposition introduite à la question 5.1 est de la forme $W = A\sigma(V)$ ou $W = A\sigma(V)B$, avec $A \neq \varepsilon$. Exprimer $p_1(2n)$ et $p_1(2n + 1)$ en fonction de $f_{\mathcal{L}}(n)$ et $f_{\mathcal{L}}(n + 1)$.

Question 5.4. Soit $f_{\mathcal{L}}$ la fonction de complexité de $\mathcal{L}$. Soit $n > 0$.

(a). Montrer que si $n \geqslant 3$, alors n se décompose sous la forme $n = 2^r + q + 1$ avec $r \geqslant 0$ et $0 < q \leqslant 2^r$. Montrer que cette décomposition est unique.

(b). Montrer que pour tout entier qui se décompose sous la forme $n = 2^r + q + 1$, on a

$$f_{\mathcal{L}}(n) = \begin{cases} 6 \cdot 2^{r-1} + 4q & \text{si } 0 < q \leqslant 2^{r-1} \\ 8 \cdot 2^{r-1} + 2q & \text{si } 2^{r-1} < q \leqslant 2^r \end{cases}.$$

(c). En déduire que $f_{\mathcal{L}}(n) \leqslant 4n$ pour tout entier n.