ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2013 FILIÈRE **MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Polynômes hyperboliques

Préambule. Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathbf{Pol}(K^n)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur K^n, dont la base canonique est constituée des fonctions monômes $x \longmapsto x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, où $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ et $x_1, , \ldots, x_n$ sont les coordonnées de x. Par convention, on aura toujours $x_j^0 = 1$, même lorsque $x_j = 0$. L'écriture d'une fonction polynomiale comme combinaison linéaire de fonctions monômes étant unique, on utilisera par la suite les mots *monôme* et *polynôme* pour désigner des fonctions monômes ou polynomiales.

Le *degré* du monôme $x_1^{m_1} \cdots x_1^{m_n}$ est l'entier $m_1 + \cdots + m_n$. Un polynôme $P \in \mathbf{Pol}(K^n)$ est dit *homogène* de degré d s'il est combinaison linéaire des monômes de degré d. Les polynômes homogènes de degré d sur K^n forment donc un espace vectoriel que l'on note $\mathbf{Hom}_d(K^n)$. Par exemple, $\mathbf{Hom}_2(K^n)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur K^n.

Si V est un espace vectoriel sur K de dimension finie n, le choix d'une base $\mathcal{B}$ de V permet d'identifier V à K^n ; on peut donc parler de polynômes et de polynômes homogènes sur V. On admettra que ces deux notions sont indépendantes du choix de $\mathcal{B}$, et on notera $\mathbf{Pol}(V)$ (respectivement $\mathbf{Hom}_d(V)$) l'espace vectoriel formé des polynômes (respectivement des polynômes homogènes de degré d) sur V.

Si $j, k \in \mathbb{Z}$ sont deux entiers, on notera $[\![j, k]\!]$ l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels que $j \leq i \leq k$. Si $k < j$, $[\![j, k]\!]$ est donc vide.

1. Si $P \in \mathbf{Hom}_d(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$, calculer
$$\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial P}{\partial x_j}(v)$$
en fonction de $P(v)$.

Le problème traite des polynômes *hyperboliques*. Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, soient $d \geq 1$ un entier et $\mathbf{a} \in V$ un vecteur non nul ; on dit qu'un polynôme homogène p de degré d sur V (donc un élément de $\mathbf{Hom}_d(V)$) est *hyperbolique dans la direction* $\mathbf{a}$ si d'une part $p(\mathbf{a}) \neq 0$, et d'autre part, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, les racines du polynôme à une variable

$$t \longmapsto p(t\mathbf{a} - x)$$

sont réelles. Remarquons que si $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, p est encore hyperbolique dans la direction de $s\mathbf{a}$; ce qui explique l'emploi du mot *direction* dans la terminologie ci-dessus.

2. Vérifier que dans cette définition, les racines de $t \longmapsto p(t\mathbf{a} - x)$, comptées avec leurs multiplicités, sont au nombre de d.

   Ces racines seront notées $\lambda_1(x; \mathbf{a}), \ldots, \lambda_d(x; \mathbf{a})$ et rangées dans l'ordre croissant :
   $$\lambda_1(x; \mathbf{a}) \leq \cdots \leq \lambda_d(x; \mathbf{a}).$$

3. Exprimer $p(x)$ au moyen de $p(\mathbf{a})$ et des $\lambda_j(x; \mathbf{a})$.

   Si $s \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction du signe de s les $\lambda_j(sx; \mathbf{a})$ et les $\lambda_j(x + s\mathbf{a}; \mathbf{a})$ au moyen des $\lambda_j(x; \mathbf{a})$.

I Exemples

4. Montrer que la fonction $S \longmapsto \det S$ est un polynôme homogène sur l'espace $\mathbf{Sym}_m(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles à m lignes et m colonnes, et que ce polynôme est hyperbolique dans une direction convenable.

5. Pour quelles valeurs de l'entier k compris entre 1 et n, la forme quadratique
   $$q(x) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2$$
   est-elle hyperbolique sur $\mathbb{R}^n$, dans une direction convenable ?

6. Si $d \geq 2$ et si $p \in \mathbf{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans une direction $\mathbf{a}$, montrer que la formule
   $$x \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)$$
   définit un polynôme hyperbolique dans la même direction. On notera ce polynôme $\mathbf{a} \cdot \nabla p$.

7. Soit $n \geq 2$ et $d \in [\![1, n]\!]$ des entiers. On définit sur $\mathbb{R}^n$ le d-ième *polynôme symétrique élémentaire* Σ_d comme suit
   $$\Sigma_d(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_d}.$$
   Montrer que Σ_d est hyperbolique dans la direction $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$.

II Continuité des racines

8. Soit n et d deux entiers strictement positifs, et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On se donne un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour toute suite (x^m) dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\bar{x}$, il existe une sous-suite $(x^{\phi(k)})$ (avec ϕ strictement croissante) telle que la suite $(F(x^{\phi(k)}))$ converge vers $F(\bar{x})$. Montrer que F est continue en $\bar{x}$.

9. Soit $p \in \mathbf{Hom}_d(V)$ un polynôme hyperbolique dans une direction $\mathbf{a}$, où $d \geq 1$ et $\dim V = n \geq 1$. On définit l'application

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Lambda} & \mathbb{R}^d \\ x & \longmapsto & (\lambda_1(x;\mathbf{a}), \ldots, \lambda_d(x;\mathbf{a})) \end{array}$$

   (a) Si une suite (x^m) de V est bornée, montrer que les suites $(\lambda_j(x^m))$ sont bornées elles-aussi.

   (b) En utilisant la question 8, montrer que Λ est continue.

III Le cône du futur

Si $p \in \mathbf{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans la direction $\mathbf{a}$, on désigne par $C(p;\mathbf{a})$ l'ensemble des vecteurs $x \in V$ qui satisfont $\lambda_1(x;\mathbf{a}) > 0$.

10. Vérifier que $C(p;\mathbf{a})$ est étoilé par rapport à $\mathbf{a}$. Montrer que $C(\mathbf{a} \cdot \nabla p;\mathbf{a}) \supset C(p;\mathbf{a})$.

    On suppose dans cette section que pour tout x non colinéaire à $\mathbf{a}$, on a les inégalités strictes

$$\lambda_1(x;\mathbf{a}) < \lambda_2(x;\mathbf{a}) < \cdots < \lambda_d(x;\mathbf{a}),$$

    et on dit alors que p est *strictement hyperbolique*.

11. Soit $\mathbf{b} \in C(p;\mathbf{a})$ et $x \in V$. Si $j \in [\![1,d]\!]$, montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi_j} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda_j(t\mathbf{b} + x;\mathbf{a}) \end{array}$$

    est surjective.

    Lorsque $d \geq 2$, à quelle condition existe-t-il deux indices distincts j et k et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_j(t) = \phi_k(t)$?

12. En déduire que p est strictement hyperbolique dans la direction $\mathbf{b}$.

13. Montrer que les ϕ_j sont strictement croissantes.

14. Soit $x, y \in V$. Montrer que $t \longmapsto \lambda_1(ty + x;\mathbf{a}) - t\lambda_1(y;\mathbf{a})$ est croissante. En déduire que $x \longmapsto \lambda_1(x;\mathbf{a})$ est concave et que $C(p;\mathbf{a})$ est un cône convexe.

15. Soit $x, \mathbf{b} \in C(p;\mathbf{a})$. Montrer que $\lambda_1(x;\mathbf{b}) > 0$.

16. En déduire que si $\mathbf{b} \in C(p;\mathbf{a})$, alors $C(p;\mathbf{b}) = C(p;\mathbf{a})$.

IV Le cas général

On admet dans cette section l'énoncé suivant (légèrement moins précis qu'un *Lemme de Rouché*) :

> Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes. Soient $w \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $\epsilon > 0$ un nombre réel. On suppose que $P(w) = 0$ et que
>
> $$\sup\{|Q(z)|\,;\,|z-w| = \epsilon\} < \inf\{|P(z)|\,;\,|z-w| = \epsilon\}.$$
>
> Alors $P + Q$ a au moins une racine w' telle que $|w' - w| < \epsilon$.

17. Soit $R = R(x, y) \in \mathbf{Pol}(\mathbb{C}^2)$ un polynôme s'annulant en $(0, 0)$. On suppose que le polynôme $x \mapsto R(x, 0)$ n'est pas nul et on note m la multiplicité de sa racine $x = 0$. De même, on suppose que le polynôme $y \mapsto R(0, y)$ n'est pas nul et on note r la multiplicité de sa racine $y = 0$.

    (a) Montrer qu'il existe des entiers $\alpha, \beta > 0$ premiers entre eux, et deux polynômes R_0 et R_1 vérifiant les conditions suivantes

    - $R(x, y) = R_0(x, y) + R_1(x, y)$,
    - $R_0(x, y) = x^m Q_0(y^\alpha / x^\beta)$, où $Q_0 \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $0 < \beta \deg Q_0 \leq m$,
    - R_1 est une combinaison linéaire de monômes $x^i y^j$ pour lesquels $\alpha i + \beta j \geq \alpha m + 1$.

    Vérifier que $Q_0(0) \neq 0$.

    (b) Montrer qu'il existe des polynômes $\hat{R} \in \mathbb{C}[X]$ et $S \in \mathbf{Pol}(\mathbb{C}^2)$ satisfaisant l'identité
    $$R(zu^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m}(\hat{R}(z) + uS(z, u)).$$
    Montrer de plus que $\hat{R}$ possède une racine $w \neq 0$.

    (c) Si w n'est pas réelle, montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}$ assez petit, il existe $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ tel que $R(zu^\alpha, u^\beta) = 0$.

18. On reprend les notations de la question précédente, et on suppose que lorsque y est réel, les racines de $R(x, y)$ sont toutes réelles.

    (a) Montrer que les racines de $\hat{R}$ sont toutes réelles.

    (b) Montrer que l'ensemble des racines de $\hat{R}$ est stable par multiplication par $e^{2i\alpha\pi/\beta}$. En déduire que $\beta \leq 2$.

    (c) En considérant aussi les points de la forme $(zu^\alpha, -u^\beta)$, montrer qu'en fait $\beta = 1$.

    (d) En déduire que $r \geq m$.

19. Soit p un polynôme homogène de degré $d \geq 1$ sur un espace vectoriel réel V de dimension $n \geq 2$, hyperbolique dans la direction de $\mathbf{a} \neq 0$. *On ne suppose pas que p soit strictement hyperbolique.* On se donne $\mathbf{b} \in C(p; \mathbf{a})$.

(a) Soit $x \in V$ et $s^* \in \mathbb{R}$; on utilise les fonctions ϕ_j définies à la question 11. Soit t^* une racine réelle de $t \mapsto p(s^*\mathbf{a} - t\mathbf{b} - x)$, de multiplicité r. Montrer qu'au plus r d'entre les fonctions ϕ_j prennent la valeur s^* en t^*.

(b) En déduire que p est hyperbolique dans la direction $\mathbf{b}$.

Les preuves des autres résultats de la partie III restant valables, on pourra utiliser par la suite le fait que

- $x \longmapsto \lambda_1(x; \mathbf{a})$ est concave et $C(p; \mathbf{a})$ est un cône convexe,
- si $\mathbf{b} \in C(p; \mathbf{a})$, alors $C(p; \mathbf{b}) = C(p; \mathbf{a})$.

V L'inégalité de Gårding sur le cone $C(p; \mathbf{a})$

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n et $d \geq 2$ un entier. Une application

$$M : V^d = \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{d \text{ copies}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est dite *symétrique* si

$$M(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) = M(x_1, \ldots, x_d),$$

pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_d \in V$ et pour toute permutation σ de $[[1, n]]$.

Une *forme d-linéaire symétrique* est une application M comme ci-dessus, qui satisfait de plus

$$M(\lambda x_1 + \mu y_1, x_2, \ldots, x_d) = \lambda M(x_1, \ldots, x_d) + \mu M(y_1, \ldots, x_d),$$

pour tous vecteurs $y_1, x_1, \ldots, x_d \in V$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Soit M une forme d-linéaire symétrique. La fonction p définie par

$$p(x) = M(x, \ldots, x), \qquad \forall x \in V$$

est alors polynomiale, homogène de degré d. On suppose que p est hyperbolique dans la direction de $\mathbf{a}$, un vecteur non nul.

20. Soit $\mathbf{b} \in C(p; \mathbf{a})$.

(a) Prouver l'identité

$$dM(x, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{b}) = p(\mathbf{b}) \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(x; \mathbf{b}), \qquad \forall x \in V.$$

(b) En déduire que

$$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{b}) \geq p(\mathbf{a})^{1/d} p(\mathbf{b})^{(d-1)/d}.$$

On pourra admettre sans démonstration *l'inégalité arithmético-géométrique* : si $u_1, \ldots, u_d$ sont des nombres réels positifs, alors

$$\frac{1}{d}(u_1 + \cdots + u_d) \geq (u_1 \cdots u_d)^{1/d}.$$

21. Vérifier que $x \mapsto M(\mathbf{a}, x, \ldots, x)$ est un polynôme hyperbolique sur V, dans la direction de $\mathbf{a}$.

22. Montrer que pour tout choix des vecteurs $x^1, \ldots, x^d$ dans $C(p; \mathbf{a})$, on a

$$M(x^1, \ldots, x^d) \geq \prod_{j=1}^{d} p(x^j)^{1/d}.$$

On pourra faire un raisonnement par récurrence sur le degré d.

23. **Applications** :

   (a) Soit $m \geq 1$ et B la forme polaire d'une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^m$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^m$. Si $\alpha > \sqrt{q(u)}$ et $\beta > \sqrt{q(v)}$, montrer que

$$\alpha\beta - B(u, v) \geq \sqrt{(\alpha^2 - q(u))(\beta^2 - q(v))}\,.$$

   (b) Si $A \in \mathbf{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on définit son *permanent*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\rho \in \mathbf{Bij}_d} a_{1\rho(1)} \cdots a_{d\rho(d)},$$

   où $\mathbf{Bij}_d$ désigne l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, d\}$ dans lui-même.
   Si A est à coefficients positifs, montrer l'inégalité

$$\operatorname{per}(A) \geq (d!) \left(\prod_{1 \leq i,j \leq d} a_{ij} \right)^{1/d}.$$

VI Concavité de $p^{1/d}$ sur le cone $C(p; \mathbf{a})$

On reprend les notations du paragraphe V. On pourra admettre que pour tout polynôme homogène p de degré d sur V, il existe une forme d-linéaire symétrique M sur V telle que $p(x) = M(x, \ldots, x)$ pour tout x dans V.

24. Soit $x, y \in C(p; \mathbf{a})$. En exprimant $p(x + y)$ au moyen de M, montrer que

$$p(x + y) \geq \left(p(x)^{1/d} + p(y)^{1/d}\right)^d.$$

En déduire que la fonction $x \longmapsto p(x)^{1/d}$ est concave sur $C(p; \mathbf{a})$.

25. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives à d lignes et d colonnes est un cône convexe, sur lequel l'application

$$S \mapsto (\det S)^{1/d}$$

est concave.

VII Inégalités de Weyl

On considère dans cette section un polynôme homogène p sur un espace vectoriel V de dimension $n \geq 3$. On suppose que p est strictement hyperbolique (voir Section III pour cette notion) dans la direction de $\mathbf{a}$, de degré $d \geq 2$. Comme on ne considérera pas d'autre direction d'hyperbolicité que $\mathbf{a}$, on notera $\lambda_r(x)$ au lieu de $\lambda_r(x;\mathbf{a})$.

On se donne trois indices $i, j, k \in [\![1, d]\!]$ vérifiant $j \leq i$ et $k+1 = i+j$. On suppose, jusqu'à la question 30 qu'il existe deux vecteurs $x, y \in V$ tels que

$$\lambda_k(x+y) < \lambda_i(x) + \lambda_j(y).$$

26. Montrer que nécessairement, $k \geq 2$.

27. Montrer qu'il existe $u, v \in V$ satisfaisant d'une part

$$\lambda_k(u+v) < \lambda_i(u),$$

et d'autre part

$$\lambda_r(v) \begin{cases} < 0, & \text{si} \quad r < j, \\ > 0, & \text{si} \quad r \geq j. \end{cases}$$

28. On choisit un élément λ^* de l'intervalle $]\lambda_k(u+v), \lambda_i(u)[$, et on considère les fonctions $\phi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\phi_r(t) = \lambda_r(u+tv), \qquad r \in [\![1, d]\!].$$

En examinant les valeurs de ϕ_r en $t = 0$, $t = 1$ et au voisinage de $\pm\infty$, donner un minorant du nombre de solutions de l'équation $\phi_r(t) = \lambda^*$. Ce minorant dépend de l'indice r.

29. (a) En déduire que le nombre de racines du polynôme

$$t \mapsto p(\lambda^* \mathbf{a} - u - tv)$$

est minoré par

$$\begin{aligned} D \;=\; & \mathrm{Card}([\![j, d]\!] \cap [\![1, d+1-j]\!]) + \mathrm{Card}([\![1, j-1]\!] \cap [\![d+2-j, d]\!]) \\ & + 2\,\mathrm{Card}([\![1, j-1]\!] \cap [\![1, d+1-j]\!] \cap [\![i, d]\!]) + 2\,\mathrm{Card}([\![j, d]\!] \cap [\![d+2-j, d]\!] \cap [\![1, k]\!]) \\ & + 2\,\mathrm{Card}([\![j, d]\!] \cap [\![1, d+1-j]\!] \cap [\![i, k]\!]). \end{aligned}$$

(b) Simplifier cette identité en

$$\begin{aligned} D \;=\; & \mathrm{Card}([\![j, d+1-j]\!]) + 2\,\mathrm{Card}([\![d+2-j, k]\!]) \\ & + 2\,\mathrm{Card}([\![j, d+1-j]\!] \cap [\![i, k]\!]). \end{aligned}$$

30. Montrer que $D = d+2$.

31. Finalement, en conclure que si des entiers $i, j, \ell \in [\![1, d]\!]$ sont tels que $\ell \geq i+j-1$, alors on a

$$\lambda_\ell(x+y) \geq \lambda_i(x) + \lambda_j(y), \qquad \forall\, x, y \in V.$$

32. Cette inégalité est-elle encore vraie lorsque le polynôme hyperbolique p n'est pas strictement hyperbolique ?

⋆ ⋆
⋆