Epreuve écrite de mathématiques-C 2013
ENS de Cachan, Lyon et Paris
Jury : Jérémie Bettinelli, Laure Dumaz, Erwan Le Pennec et Pierre Pageault

Le thème de l'épreuve de Mathématiques-C-(ULC) 2013 était la preuve d'une version simplifiée d'un théorème de Boltzmann. Il testait les candidats sur des domaines variés avec un accent autour des équations différentielles.

Le niveau des copies était très correct, avec quelques excellentes copies. Les notes se sont étalées de 0 à 20, avec une moyenne de 7.6, et un écart-type de 3.7.

1 Partie I

Cette partie visait à caractériser les fonctions satisfaisant la condition de l'énoncé sous une hypothèse de dérivabilité supplémentaire. Il était proposé de raisonner par analyse–synthèse et il ne fallait oublier la synthèse (question 2.iii)).

La première question de ce sujet s'est révélée déroutante pour de nombreux candidats (et donc discriminante). Certains ont écrit de longs calculs et perdu du temps, introduisant inutilement les fonctions réciproques sans faire attention aux domaines de définition. La seconde question a posé moins de difficulté, si ce n'est qu'il ne fallait pas oublier le cas $x = 0$ pour ii). Le dernier point, proche d'une question de cours, méritait souvent une rédaction plus efficace.

2 Partie II

Cette partie a dans l'ensemble été bien traitée par les candidats. Pour la question 2.i), il s'agissait de trouver une suite tendant vers 0 de points d'annulation et d'utiliser la continuité. La question 2.ii) utilisait le résultat de la question I-1, qui était valide pour toutes les fonctions dans F et pas seulement celles de classe C^1. Il a été apprécié que les candidats le mentionnent. Le point iii) était une question classique. Enfin pour la dernière question, il ne fallait pas oublier de traiter le cas des réels négatifs à l'aide de la parité des fonctions de F.

Partie III

La première question ne posait aucune difficulté particulière et a dans l'ensemble été bien traitée. La seconde correspondait au lemme de Gronwall. Celui-ci n'étant pas au programme, une démonstration était nécessaire pour obtenir les points. Les candidats devaient en particulier faire attention à ne pas diviser par des quantités pouvant s'annuler ou prétendre que $u' \leq v'$ implique $u \leq v$ sans autres hypothèses. De manière amusante, c'est la question pour laquelle les correcteurs ont vu le plus de (bonnes) réponses différentes. Le premier point de la troisième question n'était pas une application directe de la question précédente : le terme B dans celle-ci est y supposé constant et strictement positif alors qu'il correspond à $K_1 \int_0^t J_{n-1}(s)ds$ qui n'est ni l'un ni l'autre. Les candidats qui ont noté cette difficulté ont dans l'ensemble su la contourner. Pour le dernier point, la difficulté était dans la présence du terme $n!$ qui nécessitait une hypothèse de récurrence incorporant la dépendance en t, $J_n(t) \leq A_1 \frac{[K_1 t e^{K_1 T_1}]^n}{n!}$, pour pouvoir conclure.

Partie IV

La première question demandait beaucoup de soin car il y avait plusieurs hypothèses à vérifier afin d'appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz. Il fallait procéder par récurrence et ne pas oublier de vérifier la continuité en appliquant plusieurs fois le théorème de continuité sous le signe somme. Seulement quelques candidats ont intégralement traité cette question. Notons qu'il n'était pas nécessaire d'expliciter la solution de (3) mais que cela rendait la suite plus aisée. En particulier, la question 1.ii) devenait triviale avec l'expression de la solution, mais il était possible de la traiter élégamment en remarquant que la dérivée devait être strictement négative au premier point d'annulation si la fonction prenait des valeurs strictement négatives. La question 3.i) demandait un peu de temps mais ne présentait aucune difficulté majeure. Beaucoup de candidats ont remarqué que la question 3.ii) était une application facile des résultats précédents, mais elle ne rapportait que très peu de points. Enfin, la question 4 n'était pas une simple application de la question 3.iii), il fallait prendre en compte le fait qu'on avait affaire à une fonction de deux paramètres et appliquer le théorème de convergence uniforme.

Partie V

Partie très peu traitée par manque de temps des candidats, mis à part la première question qui a été repérée par de nombreux candidats. La question 1.i) était un résultat d'existence très facile, qui n'a pas toujours été bien rédigé. Il ne s'agissait évidemment pas d'appliquer la formule du changement de variable pour la question 2.ii) mais de la retrouver grâce à l'indication 1.i). Peu de candidats ont correctement traité cette question. Seuls quelques brillants candidats ont abordé les questions suivantes, qui étaient plus difficiles et nécessitaient d'avoir bien compris l'esprit du sujet.