Rapport sur l'épreuve de mathématiques D, filière MPI 2013

Denis Serre (concepteur), Olivier Benoist, Thomas Boulier, Tony Ly,
Jean-Marie Mirebeau, Vianney Perchet (correcteurs)

L'épreuve de 6h de mathématiques de la session 2013 portait sur les polynômes hyperboliques. Ces derniers sont apparus en tant que tels sous la plume du mathématicien suédois Lars Gårding. La terminologie rappelle que ce sont les symboles d'opérateurs différentiels hyperboliques. Ces opérateurs gouvernent les ondes qui se propagent à vitesse finie. Un résultat remarquable de L. Gårding, qui faisait l'objet de la troisième partie du problème, est une justification mathématique du principe de relativité : il n'y a pas de temps absolu, mais plutôt un cône *du futur*, dont toutes les directions peuvent être prises comme axe des temps. Un résultat fameux de Gårding, R. Bott et M. Atiyah donne une interprétation du *phénomène de Huyghens*.

La théorie des polynômes hyperboliques a trouvé depuis des applications à de nombreux domaines. La dernière partie du problème généralisait aux racines des polynômes hyperboliques les célèbres inégalités de Weyl sur les valeurs propres de $A+B$ quand A et B sont deux matrices hermitiennes (problème motivé par la mécanique quantique). En fait, toutes les inégalités vérifiées dans le cas matriciel le sont aussi dans le cas des polynômes hyperboliques, ce qui avait été conjecturé par P. Lax.

La théorie a encore permis de révolutionner les algorithmes de programmation convexe (celle-ci généralise la programmation linéaire). Enfin, elle a des liens avec la combinatoire, notamment *via* le permanent, qui est le déterminant sans les signes $\pm$.

L'épreuve était longue et ne comportait pas de partie "facile". Deux questions étaient particulièrement difficiles (les questions 5 et 17a) et demandaient aux candidats de faire preuve d'initiative. Les correcteurs ont tenu compte des solutions partielles, valorisant la réflexion des candidats sur ces questions. Dans l'ensemble, les correcteurs ont été sensibles à la clarté et à la rigueur de la rédaction. La concision et la précision des arguments ont également été prises en compte : en particulier, un raisonnement n'aboutissant pas doit être signalé comme tel par le candidat. Précisons aussi que les copies doivent être propres et lisibles : les correcteurs n'accorderont jamais le bénéfice du doute à une expression indéchiffrable. Les correcteurs ont également eu le plaisir de lire d'assez nombreuses copies qui assimilaient bien l'esprit du sujet et répondaient presque complètement à certaines parties.

Le jury se permet d'insister sur deux points importants et souvent mal traités :

(A) l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De nombreuses copies ont tenté de l'appliquer à des formes quadratiques non définies positives. D'autres copies se sont trompé sur le sens de l'inégalité.

(B) la négation de la continuité en un point. De nombreux candidats ne sont pas à l'aise avec l'utilisation des quantificateurs et leur négation.

Une des spécificités du sujet était le traitement fin des multiplicités des racines des polynômes, avec notamment les notions de polynôme hyperbolique et strictement hyperbolique. A ce sujet, le jury souhaite insister sur le point suivant:

(C) l'identification des racines d'un polynôme *et de leur multiplicité*. Pour prouver que les racines d'un polynôme univarié P, répétées selon leur multiplicité, sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, il n'est pas suffisant de montrer que $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

A présent, revenons sur le détail des questions.

Introduction

Les premières questions amenaient les candidats à utiliser les notions classiques sur les polynômes : base des polynômes à plusieurs variables, relations entre coefficients et racines d'un polynôme à une variable. Malgré leur relative simplicité, ces questions ont souvent été insuffisamment soignées.

1. Le jury a été surpris par le nombre de candidats qui oubliaient les coefficients dans la décomposition d'un polynôme sur la base des monômes. D'autres candidats n'ont, à tort, considéré que des monômes de la forme x_i^d.

2. Pour prouver qu'un polynôme d'une variable t est de degré d, il ne faut pas oublier de justifier que le coefficient de t^d est non nul.

3. Il s'agissait d'utiliser les relations entre racines et coefficients d'un polynôme univarié, sans oublier le rôle du coefficient dominant. Dans la seconde partie de la question, le cas de racines multiples a souvent été mal traité (voir (C)).

I Exemples

Cette partie illustrait et concrétisait la notion de polynôme hyperbolique, à travers des exemples de difficulté variable.

4. Cette question a été bien traitée mais le jury tient néanmoins à signaler certaines erreurs : l'oubli de la signature dans l'expression du déterminant d'une matrice, ou encore l'affirmation choquante $\det(I_m) = m$. On souhaite que le théorème spectral soit énoncé complètement et proprement.

5. La question demandait au candidat de distinguer des cas, plus ou moins délicats à traiter (attention à (A)). Les réponses partielles qui identifiaient et traitaient une partie de ces cas ont été valorisées.

6. Les points essentiels de cette question étaient de dériver une fonction composée et d'appliquer le théorème de Rolle à un polynôme en faisant attention aux multiplicités de ses racines.

7. Une somme de polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement scindée.

II Continuité des racines

8. Voir (B). Aussi une suite possédant une unique valeur d'adhérence dans un espace *non* compact n'est pas nécessairement convergente.

9a. Majorer un produit de réels ne permet pas directement de borner ces réels.

9b. L'application du théorème de Bolzano-Weierstrass n'était pas suffisante pour conclure : voir (C).

III Le cône du futur

Cette partie, abstraite et un peu déroutante, constitue le cœur du sujet. Les vaillants candidats qui s'y sont attaqué ont eu l'occasion d'y montrer leurs qualités.

10. Signalons certains flottements sur la notion d'ensemble étoilé.

IV Le cas général

17a. La question, difficile, n'a pas été identifiée comme telle par certains candidats qui ont prétendu avoir obtenu la décomposition demandée sans justification valable.

18b. Attention à ne jamais diviser par zéro ! Pour montrer $\beta \leq 2$, le jury attendait l'argument suivant : montrer que β divise 2α, puis en déduire que β divise 2 parce que α et β sont premiers entre eux.

V L'inégalité de Gårding sur le cône $C(p; \mathbf{a})$

20b. L'application de l'inégalité arithmético-géométrique, suggérée dans l'énoncé, requiert de vérifier que les termes sont positifs.

Les questions suivantes ont été abordées par une poignée de candidats.