Epreuve écrite de mathématiques-C 2014
ENS de Cachan, Lyon, Paris et Rennes
Concepteur : Jean-Marie Mirebeau
Jury : Ludovic Goudenège, Erwan Le Pennec, Pierre Pageault et Laurent Seppecher

Le thème de l'épreuve de Mathématiques-C-(ULCR) 2014 était l'étude des minima de Minkowski, à travers 4 parties de difficulté croissante. Il nécessitait de maitriser des compétences variées principalement autour de l'algèbre linéaire, de l'arithmétique et du calcul intégral.

Le niveau des copies était très correct, avec quelques excellentes copies. Les notes se sont étalées de 0 à 20, avec une moyenne de 9.7, et un écart type de 4.5.

A - Préliminaires

La partie A était relativement facile dans l'ensemble et a été abordée par la quasi totalité des candidats.

- La partie I n'a en général pas posé de difficultés, sauf dans les plus mauvaises copies. Les correcteurs ont été particulièrement attentifs à la rédaction et rappellent que celle-ci doit être soignée, y compris pour les questions les plus simples.
- La partie II a également été abordée par une très grande majorité des candidats, mais avec une réussite moins grande. Les questions, sans être particulièrement difficiles, demandaient une certaine minutie, une attention aux détails, et de la précision dans la rédaction.
  La question 1 n'a en général pas posé de problème. Pour la question 2, un choix de type $\{u, v\} = \{e_1, e_2\}$ a bien été fait dans la plupart des copies, où nous désignons ici et plus bas par (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. De trop nombreux candidats ont cependant oublié qu'on ne pouvait savoir a priori lequel des deux vecteurs avait la M-norme la plus grande. La question 3 a dans l'ensemble été bien traitée, sauf par quelques candidats ayant oublié de vérifier que $\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M)$. La question 4 n'a pas posé de difficulté autre que l'ordre des valeurs propres dans la matrice, à l'inverse de la question 5 qui n'a que très rarement été bien résolue. Il suffisait de remarquer que $\|u\|_M$ (respectivement $\|v\|_M$) était minoré par $\mu_1(M)\|u\|$ (respectivement $\mu_1(M)\|v\|$) pour montrer que l'infimum n'était pas modifié en se restreignant à l'intersection de $\mathbb{Z}^2$ avec la boule $B(0, \min\{\|e_1\|_M, \|e_2\|_M\}/\mu_1)$ (respectivement avec la

boule $B(0, \max\{\|e_1\|_M, \|e_2\|_M\}/\mu_1))$ et donc à des ensembles finis sur lesquels l'infimum est toujours atteint.

Partie B

Dans la partie B, les candidats devaient étudier l'existence d'une base M-reduite, ceci afin d'estimer les produits des minima de Minkowski. Cette partie a souvent été très bien traitée dans l'ensemble, mais ce sont souvent les questions les moins bien traitées par les candidats qui rapportaient le plus de points. Par ailleurs, d'assez nombreux candidats ont survolé le sujet et tenté de répondre à des questions faciles isolées au sein des parties. Bien que cela puisse se révéler stratégique, ces questions sont souvent les moins cotées, et cette attitude n'est pas la plus appréciée des correcteurs.

- La partie I a été très bien traitée par les candidats. Toutefois, sur la question 2, des candidats ont confondu la notion de base du réseau $\mathbb{Z}^2$, introduite dans le sujet, avec celle de base vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Moins d'un tiers des candidats a finalement gagné des points sur cette question.
- La partie II a été très peu traitée (sauf la question 2.(b) pour le cas $\beta' = 0$ qui a été souvent traitée en solitaire). Lorsqu'elle a été traitée, la question 2 a rapporté le maximum de points possibles, les candidats répondant correctement en grande majorité. Seule la question 1 semble avoir posé des problèmes aux candidats. En notant u_1, u_2 et v_2 des vecteurs vérifiant

  $$\|u_1\|_M = \lambda_1(M), \|v_2\|_M = \lambda_2(M), \|u_2\|_M \leq \|v_2\|_M \text{ et } \mathrm{Det}(u_2, v_2) \neq 0,$$

  (c'est-à-dire les vecteurs atteignant les minima de Minkowski), il suffisait d'étudier la nullité de $\mathrm{Det}(u_1, v_2)$ pour conclure que soit (u_1, v_2) soit (u_1, u_2) satisfaisaient les conditions demandées. Les candidats ont parfois répondu que (u_2, v_2) était solution, mais rien de permettait d'affirmer que $\|u_2\|_M = \lambda_1(M)$.
- Pour la partie III, les questions 1, 2 et 3 de nature géométrique ont été traitées (assez correctement) par une grande majorité des candidats. Beaucoup de copies s'arrêtent d'ailleurs au début de la question 4. Suivent alors quelques questions piochées dans la partie C. La question 4, plutôt difficile mais fortement cotée, a permis de faire la différence entre les candidats qui avaient la volonté de terminer une partie du sujet, et ceux se contentaient grappiller quelques points épars parmi les questions faciles de la partie suivante.

Partie C

Seuls les bons candidats ont pu aborder avec succès la partie C. Quelques candidats ont toutefois répondu aux questions 2, 3 et 4 de la partie II ou la 3.(a) de la partie III pour tenter de récupérer quelques points.

- La partie I a souvent été bien traitée, sauf les inégalités pour $\lambda_2(M)$ de la question 2, et le caractère intégrable de $1/\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)$ car $\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)$ est une fonction continue qui ne s'annule pas.
- La question 1 de la partie II n'a été traitée correctement par quasiment aucun candidat. Il suffisait de poser $z = r(\cos\phi, \sin\phi)$, en utilisant les coordonnées polaires $r = \|z\|$, $\phi \in \mathbb{R}$, pour d'obtenir

$$R_\theta z = r(\cos(\theta+\phi), \sin(\theta+\phi)),$$
$$\|R_\theta z\|_M = \|z\|\sqrt{\cos^2(\theta+\phi) + \mu^4 \sin^2(\theta+\phi)}.$$

  Le résultat s'obtenait alors par le changement de variable $\tilde{\theta} := \theta + \phi$, puis en remarquant les symétries de la fonction intégrée.
- La partie III a été très peu traitée mis-à-part les questions précédemment citées. Les questions 1, 5 et 6 n'ont été abordées que par une poignée de candidats et aucun n'a obtenu tous les points.

Partie D

La partie D a été très peu abordée et quasiment toujours sans succès.