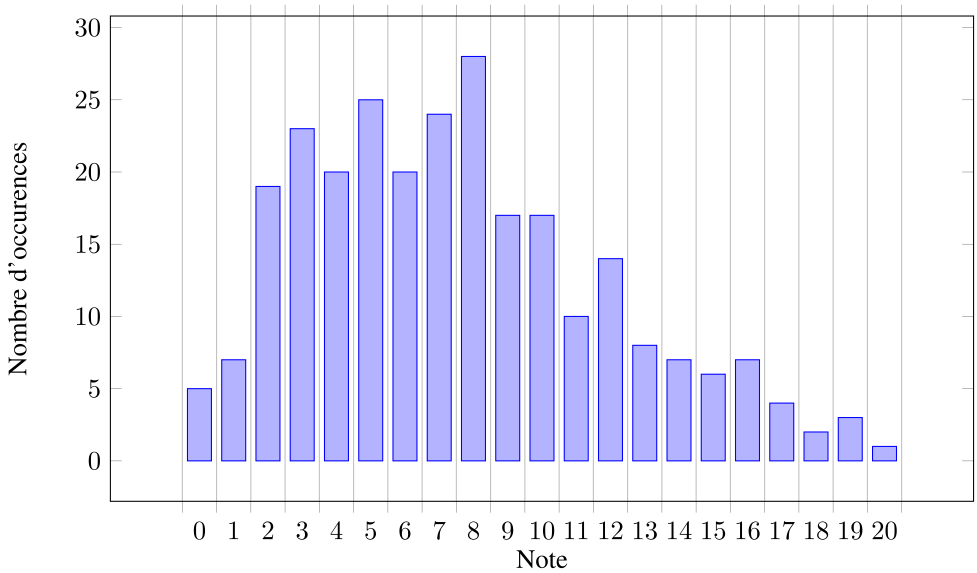
Épreuve écrite d'informatique-mathématiques – Filière MP spécialité Info
ENS : ULM, LYON, CACHAN, RENNES
Correcteurs : Anne Bouillard, Blaise Genest et Xavier Goaoc

Le sujet portait sur l'étude de la complexité d'hypergraphes au travers de la notion de dimension VC (d'après ses inventeurs, Vladimir Vapnik et Alexey Chervonenkis), qui rend compte de la complexité d'un hypergraphe par des considérations locales. Cette notion, introduite en théorie de l'apprentissage, intervient dans de nombreuses questions en informatique et en mathématique et permet notamment, en algorithmique, de quantifier la difficulté d'approximer un hypergraphe donné.

Le nombre de candidats s'étant présentés à l'épreuve était de 267. Les notes allaient de $0,40$ à 20 avec une moyenne de 8 et la répartition suivante :



La première partie établissait par récurrence le "Lemme de Sauer", une borne supérieure sur le nombre d'hyperarêtes d'un hypergraphe en fonction de son nombre de sommets et de sa dimension VC. Les questions 1, 2 et 3 étaient élémentaires et avaient pour but de permettre aux candidat(e)s de se familiariser avec les objets. Le jury attendait des réponses claires et précises ; à titre d'exemple, le pourcentage de réponses ayant eu tous les points pour les questions 2.a et 2.b sont respectivement de 70% et 45%. De manière générale, le barème de cette partie a pénalisé le manque de rigueur.

La deuxième partie donnait une preuve alternative du Lemme de Sauer due (indépendamment) à Noga Alon et Peter Frankl. Cette preuve procède en "compressant" l'hypergraphe, *ie* en enlevant un sommet de toutes les hyperarêtes pour lesquelles cela ne résulte pas en une arête déjà existante. Il s'agissait tout d'abord de montrer qu'une telle compression ne modifie pas la taille d'un hypergraphe, ni n'augmente sa dimension VC. On établissait ensuite qu'après un nombre fini de telles compressions, l'hypergraphe ne change plus et est clos par sous ensemble : tout sous-ensemble d'une hyperarête est lui aussi une hyperarête ; un tel hypergraphe est aussi appelé un *complexe simplicial*. Pour les complexes simpliciaux la dimension VC coïncide avec la dimension maximale d'une face et le Lemme de Sauer est immédiat. Presque tou(te)s les candidat(e)s ont abordé au moins une question dans cette partie, mais certaines questions ont été assez peu traitées. Ainsi, l'on n'a trouvé d'éléments de réponses valables aux questions 6.a, 6.b, 8.a et 8.b que dans, respectivement, 53%, 37%, 16% et 8% des copies. La difficulté de ces questions a été prise en compte dans le barème et les candidat(e)s ayant fait l'effort de s'y attaquer ont été récompensés.

La troisième partie étudiait la dimension VC de quelques hypergraphes géométriques. Après avoir établi quelques propriétés de convexité, on prouvait le "lemme de Radon" et l'on s'en servait pour borner la dimension

VC de tout hypergraphe induit par les demi-espaces de $\mathbb{R}^d$. On observait ensuite que la dimension VC des hypergraphe induit par les convexes de $\mathbb{R}^d$ ne peut, elle, pas être bornée uniformément. Si les questions 9 et 10.a ont été traitées par une majorité de candidat(e)s, de nombreuses copies n'abordent pas les questions plus délicates. Ainsi, une grande moitié des copies ne discutent, à la question 10.b, que l'implication évidente et les questions 12 et 13 n'ont été abordées que par, respectivement, 17% et 11% des copies. Le barème a pénalisé le manque de rigueur pour les questions élémentaires et a récompensé les efforts pour aborder les questions délicates.

La quatrième partie étudiait un algorithme de construction d'un ensemble ϵ-fin (en anglais : ϵ-net) au moyen du "Lemme de sélection" d'Imre Bárány. Ces ensembles interviennent par exemple dans des algorithmes d'approximation en géométrie algorithmique. Pour les hypergraphes de dimension VC bornée, des méthodes probabilistes permettent de construire facilement des ensembles ϵ-fin. Cette partie étudie le cas des hypergraphes induits par les convexes de $\mathbb{R}^2$, dont on a vu en partie III qu'ils pouvaient avoir une dimension VC arbitrairement grande. Cette partie n'a été abordée que par 10% des copies et ce, le plus souvent, de manière très marginale.

Remarques globales

Le barème a bien évidemment tenu compte de la longueur du sujet. Les correcteurs tiennent à souligner les points suivants :

> **Le manque de rigueur coûte généralement cher**. Il est peut-être utile de souligner que les correcteurs accepteront une rédaction rapide d'autant plus facilement que le/la candidat(e) aura traité les questions similaires précédentes rigoureusement et identifie clairement les points auxquels prêter attention.
>
> **Pour obtenir une bonne note il n'est pas nécessaire de faire beaucoup de questions, mais il faut affronter la difficulté.** Le barème et la notation ont récompensé les efforts pour aborder les questions délicates. Certaines copies ayant traité très correctement la partie I et le début de la partie II ont eu plus de la moyenne ; inversement, les copies qui ne traitaient aucune question difficile ont rarement reçu une note satisfaisante.
>
> **Les tentatives d'escroquerie sont à proscrire.** Il semble nécessaire de rappeler que l'honnêteté intellectuelle est une des qualité évaluée, étant la base de la démarche scientifique. Les escamotages de difficultés au fil de raisonnements inutilement tortueux, les affirmations sans explication de reformulations des questions posées, etc, sont donc très mal vues et rendent les correcteurs particulièrement strict(e)s. Les bonnes idées et arguments partiels sont d'autant plus récompensés que la copie reconnaît les lacunes du raisonnement proposé.

Soulignons que les deux premiers points étaient déjà largement mis en avant dans le rapport de l'épreuve informatique-mathématiques 2013.

Remarques spécifiques

Question 2.b Il convient d'expliciter l'usage d'une symétrie des rôles lorsque l'on s'en sert. Ainsi, les affirmations telles que "comme $\alpha \neq \beta$ il existe $x \in \alpha \setminus \beta$" sans autre précision ont été (légèrement) pénalisées.

Question 2.c Un nombre non négligeable de copies ont proposé d'utiliser l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H_{|U} & \to & H_{|V} \\ \alpha \cap U & \mapsto & \alpha \cap V \end{array} \right.$$

Cette définition a été sanctionnée comme absurde puisque cette application n'est pas définie, plusieurs α peuvent donner lieu à des $\alpha \cap U$ identiques mais à des $\alpha \cap V$ distincts.

Question 3.a et 3.b Dans la preuve de la borne supérieure, il faut faire attention à donner un argument *universel*, *ie* valable pour tout triplet ou quadruplet de sommets de l'hypergraphe.

Question 4.e Les copies ayant proposé un exemple valable uniquement dans le cas où $n = d$ n'ont reçu qu'une partie des points.

Question 5 Un nombre non négligeable de copies ont argumenté que la fonction

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} D_x H & \to & H \\ \alpha & \mapsto & \alpha \cup \{x\} \end{array} \right.$$

inverse l'opération de compression. C'est faux puisque si $\alpha \in H$ et $\alpha \cup \{x\} \notin H$ alors $\alpha \in D_x H$ mais $\alpha \cup \{x\} \notin H$.

Question 6.a et 6.b Ces deux questions pouvaient éventuellement être traitées d'un seul trait, la distinction ayant pour but d'aider les candidats. De trop nombreuses tentatives d'escroquerie ont été relevées (et sanctionnées).

Question 9.a Plusieurs copies ont proposé une preuve par récurrence sur le nombre d'ensembles convexes considérés et en ont conclu que toute intersection (non seulement dénombrable, mais aussi arbitraire) de convexes est convexe. Elles ont été sanctionnées.

Question 9.b et 9.c Ces questions, élémentaires, avaient pour but de familiariser les candidat(e)s avec ces principes de convexité. Une rédaction impeccable était attendue.

Question 11.a Les copies ayant utilisé deux liaisons, par exemple une entre $x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$ et une autre entre $x_2, x_3, \dots, x_{d+2}$, sans justifier que ces formes linéaires peuvent être choisies indépendantes et non triviales ont été pénalisées.

Éléments de corrigé

Ce qui suit sont des éléments de corrigé proposés à titre indicatif. Ils ne donnent qu'une solution admissible pour chaque question, d'autres étant parfois possibles.

Partie I

Question 1. *Soit $S = \{0, 1, \dots, n-1\}$ l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n-1$.*

a. *Quel est, en fonction de n, le nombre maximum d'hyperarêtes que peut avoir un hypergraphe de sommets S ? On justifiera la réponse.*

b. *Combien d'hypergraphes de sommets S différents existe-t-il ? On justifiera la réponse.*

c. *Démontrer :*

$$\forall p \geq q \geq 1, \qquad \binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1}.$$

Solution à la question 1.

a. Le nombre maximum d'hyperarêtes de S est $|P(S)|$. On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a $|P(S)| = 2^n$. Pour $n = 1$ on a $S = \{1\}$ et $P(S) = \{\emptyset, \{1\}\}$ donc la propriété est vraie. Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$P(\{1, 2, \dots, n+1\}) = P(\{1, 2, \dots, n\}) \cup \{\alpha \cup \{n+1\} \mid \alpha \in P(\{1, 2, \dots, n\})$$

et comme l'union est disjointe, $|P(\{1, 2, \dots, n+1\})| = 2|P(\{1, 2, \dots, n\})|$. Il s'ensuit que si $|P(\{1, 2, \dots, n\})| = 2^n$ alors $|P(\{1, 2, \dots, n+1\})| = 2^{n+1}$.

b. Les hypergraphes de sommets S sont précisément les éléments de $P(P(S))$. En utilisant le (a) on trouve qu'il y en a 2^{2^n}.

c. Soit S un ensemble à p éléments et fixons $x \in S$. Soit C_x l'ensemble des sous-ensembles de S de cardinal q qui contiennent x et E_x l'ensemble des sous-ensembles de S de cardinal q qui ne contiennent pas x. Les ensembles C_x et E_x partitionnent les sous-ensembles de S de cardinal q donc

$$\binom{p}{q} = |C_x| + |E_x|.$$

Les éléments de E_x sont précisément les sous-ensembles de $S \setminus \{x\}$ de cardinal q, donc $|E_x| = \binom{p-1}{q}$. Par ailleurs, l'application $f : U \subseteq S \mapsto U \setminus \{x\}$ met en bijection C_x avec l'ensemble des sous-ensembles de $S \setminus \{x\}$ de cardinal $q-1$. Donc $|C_x| = \binom{p-1}{q-1}$. L'identité s'ensuit.

Question 2. *Soient S un ensemble fini, H un hypergraphe de sommets S et $U \subseteq V \subseteq S$.*

a. *Donner un exemple de S, H, U et V pour lesquels $H_{|U} \nsubseteq H_{|V}$.*

b. *Démontrer que pour toutes hyperarêtes $\alpha, \beta \in H$, on a :*

$$\alpha \cap U \neq \beta \cap U \quad \Rightarrow \quad \alpha \cap V \neq \beta \cap V.$$

c. *En déduire que* $|H_{|U}| \leq |H_{|V}|$.

Solution à la question 2.

a. $S = \{0,1\}, H = \{\{0,1\}\}, U = \{0\}, V = \{0,1\}$.

b. Soit $\alpha, \beta \in H$. Si $\alpha \cap U \neq \beta \cap U$ alors il existe $x \in S$ tel que l'une des deux conditions est vraie : (i) $x \in (\alpha \cap U) \setminus (\beta \cap U)$ ou (ii) $x \in (\beta \cap U) \setminus (\alpha \cap U)$. Supposons (i) par symétrie des rôles entre α et β. On a alors que $x \in \alpha \cap U$ et $x \notin \beta$ (sinon comme $x \in U$ on aurait $x \in \beta \cap U$). Comme $U \subseteq V$ il s'ensuit que $x \in \alpha \cap V$ et $x \notin \beta \cap V$. Donc $\alpha \cap V \neq \beta \cap V$.

c. On note $k = |H_{|U}|$ et on choisit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in H$ telles que $H_{|U} = \{U \cap \alpha_i | 1 \leq i \leq k\}$. Remarquons que

$$\forall 1 \leq i,j \leq k, \qquad i \neq j \Rightarrow U \cap \alpha_i \neq U \cap \alpha_j.$$

D'après (a) on a donc

$$\forall 1 \leq i,j \leq k, \qquad i \neq j \Rightarrow V \cap \alpha_i \neq V \cap \alpha_j.$$

et $H_{|V}$ contient au moins k éléments distincts : $V \cap \alpha_1, V \cap \alpha_2, \ldots, V \cap \alpha_k$.

Question 3. *Dans cette question on suppose* $n \geq 3$.

a. *Soient S un ensemble de n réels deux à deux distincts et H l'hypergraphe de sommets S défini par $H = \{S \cap [a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Calculer* $\dim_{\mathrm{VC}}(H)$.

b. *On note $\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Soit $S' \subseteq \mathbb{S}$ un sous-ensemble de $\mathbb{S}$ de cardinal n. On définit :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{S} \\ \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array} \right. \qquad \textit{et} \quad H' = \{S' \cap f([a,b]) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

H' est donc un hypergraphe de sommets S'. Calculer $\dim_{\mathrm{VC}}(H')$.

Solution à la question 3.

a. Prenons deux éléments $x, y \in S$ avec $x < y$ et posons $X = \{x, y\}$. On remarque que $H_{|X} = P(X)$ en posant $t = \frac{y-x}{3}$ et en considérant les quatre intervalles :

$$[x+t, y-t], [x, y-t], [x+t, y], \quad \text{et} \quad [x,y].$$

Donc $\dim_{\mathrm{VC}}(H) \geq 3$. Maintenant, soit $X \subseteq S$ avec $|X| \geq 3$ et soient $x, y, z \in X$ avec $x < y < z$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes donc tout intervalle contenant x et z contient aussi y. Par conséquent, $\{x, z\} \notin H_{|X}$ et donc $X \notin R(H)$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = 3$.

b. Soit $X \subseteq S$ de cardinal 3. On écrit

$$X = \{(\cos\theta_1, \sin\theta_1), (\cos\theta_2, \sin\theta_2), (\cos\theta_3, \sin\theta_3)\}$$

avec $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$. On pose $t_{i,j} = \frac{\theta_j - \theta_i}{3}$ et on remarque que $H'_{|X} = P(X)$ en considérant les images par f des huit intervalles :

$$[\theta_1 + t_{1,2}, \theta_2 - t_{1,2}], [\theta_1, \theta_1 + t_{1,2}], [\theta_2, \theta_2 + t_{2,3}], [\theta_2 + t_{2,3}, \theta_3],$$
$$[\theta_1, \theta_2], [\theta_2, \theta_3], [\theta_3 - 2\pi, \theta_1], [\theta_1, \theta_3].$$

Donc $\dim_{\mathrm{VC}}(H') \geq 4$.

Soit $X \subseteq S$ avec $|X| \geq 4$ et soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$. On écrit $x_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ avec $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $|b - a| < 2\pi$ et $x_1, x_3 \in f([a,b])$. Alors il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_3 \in \mathbb{Z}$ tels que $\theta_1 + 2k_1\pi \in [a,b]$ et $\theta_3 + 2k_3\pi \in [a,b]$. Comme

$$|\theta_3 - \theta_1 + (k_3 - k_1)2\pi| \leq |b - a| < 2\pi$$

alors $|k_3 - k_1| \leq 1$ et de plus, si $k_3 - k_1 \geq 0$ alors $\theta_3 > \theta_1$ implique $k_3 = k_1$. Ainsi, soit $k_1 = k_3$ ou $k_1 = k_3 + 1$. Dans le premier cas, $\theta_2 + 2k_1\pi \in [\theta_1 + 2k_1\pi, \theta_3 + 2k_3\pi] \subseteq [a,b]$. Dans le second cas, $\theta_4 + 2k_3\pi \in [\theta_3 + 2k_3\pi, \theta_1 + 2k_1\pi] \subseteq [a,b]$. Il s'ensuit que $\{x_1, x_3\} \notin H'_{|X}$ et donc pour tout $X \subseteq S$ avec $|X| \geq 4$ on a $H'_{|X} \neq P(X)$. Par conséquent, $\dim_{\mathrm{VC}}(H') = 4$.

Question 4. *Soient S un ensemble fini de cardinal n et H un hypergraphe de sommets S.*

a. *Montrer que si $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = 1$ alors $|H| \leq 1$.*

b. *Soit $x \in S$. On définit deux hypergraphes de sommets $S \setminus \{x\}$:*

$$H' = H_{|S \setminus \{x\}} \quad \textit{et} \quad H'' = \{\alpha \in H' \mid \alpha \in H \textit{ et } \alpha \cup \{x\} \in H\}.$$

Montrer que $|H| = |H'| + |H''|$.

c. *On considère à nouveau les hypergraphes H' et H'' définis à la question 4(b). Montrer que $\dim_{\mathrm{VC}}(H') \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H)$ et que $\dim_{\mathrm{VC}}(H'') \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H) - 1$.*

d. *Montrer que si $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = d$, alors :*

$$|H| \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n}{i}.$$

e. *Donner, pour tout $n \geq d$, un exemple d'hypergraphe à n sommets pour lequel l'inégalité de la question 4(d) devient une égalité. On justifiera la réponse.*

Solution à la question 4.

a. Supposons qu'il existe deux hyperarêtes distinctes $\alpha, \beta \in H$. Comme $\alpha \neq \beta$ il existe un sommet qui appartient à l'une et pas à l'autre ; par symétrie des rôles entre α et β on suppose qu'il existe $v \in S$ tel que $v \in \alpha$ et $v \notin \beta$. Alors, si $X = \{v\}$ on a $\{\alpha \cap X, \beta \cap X\} \subseteq H_{|X}$. Comme $\{\alpha \cap X, \beta \cap X\} = \{\{v\}, \emptyset\} = P(X)$, il s'ensuit que $H_{|X} = P(X)$ et $\dim_{\mathrm{VC}}(H) \geq 2$. Par contraposition, si $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = 1$ il n'existe pas deux hyperarêtes distinctes dans H et donc $|H| \leq 1$.

b. On considère l'application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & H' \\ \alpha & \mapsto & \alpha \setminus \{x\} \end{array} \right.$$
et pour tout $\beta \in H'$ on note $f^{-1}(\beta) = \{\alpha \in H \mid f(\alpha) = \beta\}$. Cette fonction f est surjective par définition de H' et définie sur tout H. Par conséquent,
$$|H| = \sum_{\beta \in H'} |f^{-1}(\beta)|.$$
On note que pour tout $\beta \in H'$, $f^{-1}(\beta)$ est non vide et contenu dans $\{\beta, \beta \cup \{x\}\}$. Par conséquent, $1 \leq |f^{-1}(\beta)| \leq 2$ et plus précisément :
$$|f^{-1}(\beta)| = \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ si } \beta \in H'' \\ 1 \text{ sinon} \end{array} \right.$$
Il s'en suit que $|H| = 2|H''| + |H' \setminus H''|$ et comme $H'' \subseteq H'$, on obtient finalement que $|H| = |H'| + |H''|$.

c. Notons $k = \dim_{\mathrm{VC}}(H')$. Soient $Y \subseteq S \setminus \{x\}$ tel que $|Y| = k - 1$ et $H'_{|Y} = P(Y)$. Pour tout $T \in P(Y)$ il existe donc une hyperarête $\alpha \in H'$ tel que $T = \alpha \cap Y$. Puisque $\alpha \in H'$, il existe $\beta \in H$ tel que $\alpha = \beta \cap (S \setminus \{x\})$. Comme $x \notin Y$ il s'ensuit que $\beta \cap Y = T$. Comme cela est vrai pour tout $T \in P(Y)$, on a $H_{|Y} = P(Y)$. Il s'ensuit que $\dim_{\mathrm{VC}}(H) \geq |Y| + 1 = k = \dim_{\mathrm{VC}}(H')$.

Notons maintenant $\ell = \dim_{\mathrm{VC}}(H'')$. Soit $Z \subseteq S \setminus \{x\}$ tel que $|Z| = \ell - 1$ et $H'_{|Z} = P(Z)$. Pour tout $T \in P(Z)$ il existe donc une hyperarête $\alpha \in H''$ tel que $T = \alpha \cap Z$. Notons $\beta = \alpha \cup \{x\}$. Par définition de H'', $\alpha \in H$ et $\beta \in H$ et
$$T = (Z \cup \{x\}) \cap \alpha \qquad \text{et} \qquad T \cup \{x\} = (Z \cup \{x\}) \cap \beta.$$
Il s'ensuit que $H_{|T \cup \{x\}} = P(T \cup \{x\})$ et $\dim_{\mathrm{VC}}(H) \geq |Z| + 2 = \ell + 1 = \dim_{\mathrm{VC}}(H') + 1$.

d. On a montré au (a) que cette propriété est vraie pour $d = 1$ et pour tout $n \geq 1$. Remarquons que pour $n = 1$ et $d \geq 2$ cette propriété énonce qu'un hypergraphe sur 1 sommet a au plus 2 hyperarêtes, ce qui est trivialement vrai. Fixons maintenant $N \geq 1$ et $D \geq 1$, supposons que H est un hypergraphe de sommets S avec $|S| = N$ et tel que $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = D$. Supposons la propriété vérifiée pour tout couple (d, n) inférieur à (D, N) pour l'ordre lexicographique et définissons H' et H'' comme au (b). D'après (b) on a $|H| = |H'| + |H''|$ et d'après (c) on a $\dim_{\mathrm{VC}}(H') \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H)$ et que $\dim_{\mathrm{VC}}(H'') \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H) - 1$. L'hypothèse de récurrence donne donc
$$|H| = |H'| + |H''| \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{N-1}{i} + \sum_{i=0}^{d-2} \binom{N-1}{i}$$
ce qui se réécrit :
$$|H| \leq 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{N-1}{i} + \binom{N-1}{i-1} = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{N}{i} = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{N}{i}.$$

e. On fixe d et on considère l'hypergraphe de sommets $\{1, 2, , \ldots, n\}$ dont les hyperarêtes sont exactement les sous-ensembles de cardinal au plus $d - 1$. Il est clair que
$$|H| = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n}{i}.$$
Par ailleurs, H a dimension VC exactement d : cette dimension VC est au moins d car tout sous-ensemble de cardinal $d - 1$ de $\{1, 2, , \ldots, n\}$ est pulvérisé par H, et cette dimension est au plus d car si $X \subseteq \{1, 2, , \ldots, n\}$ est de cardinal au moins d alors $X \notin H_{|X}$ et donc X n'est pas pulvérisé.

Partie II

Question 5. *Montrer que pour tout $x \in S$ on a $|D_x(H)| = |H|$. Indication : on pourra chercher à expliciter une bijection entre H et $D_x(H)$.*

Solution à la question 5. Pour tout $x \in S$ et $\alpha \subseteq S \setminus \{x\}$, on note $S(\alpha, x) = \{\alpha, \alpha \cup \{x\}\}$. On a quatre cas de figure :

- soit $H \cap S(\alpha, x) = S(\alpha, x)$, et alors $D_x(H) \cap S(\alpha, x) = S(\alpha, x)$,
- soit $H \cap S(\alpha, x) = \{\alpha\}$, et alors $D_x(H) \cap S(\alpha, x) = \{\alpha\}$,
- soit $H \cap S(\alpha, x) = \{\alpha \cup \{x\}\}$, et alors $D_x(H) \cap S(\alpha, x) = \{\alpha\}$,
- soit $H \cap S(\alpha, x) = \emptyset$, et alors $D_x(H) \cap S(\alpha, x) = \emptyset$.

Cela implique immédiatement que pour tout $\alpha \subseteq S \setminus \{x\}$ on a $|H \cap S_\alpha| = |D_x(H) \cap S_\alpha|$. Comme les $S(\alpha, x)$, pour $\alpha \subseteq S \setminus \{x\}$, partitionnent $P(S)$, on a
$$|H| = |H \cap P(S)| = \sum_{\alpha \subseteq S \setminus \{x\}} |H \cap S_\alpha| = \sum_{\alpha \subseteq S \setminus \{x\}} |D_x(H) \cap S_\alpha| = |D_x(H) \cap P(S)| = |D_x(H)|.$$

Question 6. *Soient $U \subseteq S$ et $x \in S$.*

a. *Montrer que si $x \notin U$ alors $(D_x(H))_{|U} \subseteq D_x(H_{|U})$.*

b. *Montrer que si $x \in U$ alors $(D_x(H))_{|U} \subseteq D_x(H_{|U})$.*

Solution à la question 6.

a. Soit $\alpha \in (D_x(H))_{|U}$. Par définition de la trace, il existe $\beta \in D_x(H)$ tel que $\alpha = \beta \cap U$. Par définition du décalage il existe $\gamma \in H \cap \{\beta \setminus \{x\}, \beta \cup \{x\}\}$ et $\gamma \cap U \in H_{|U}$. Comme $x \notin U$ on a

$$\gamma \cap U = \beta \cap U = \alpha.$$

et donc $\alpha \in H_{|U}$. Par conséquent, $\alpha = \alpha \setminus \{x\} \in D_x(H_{|U})$ ce qui prouve l'inclusion demandée.

b. Soit $\alpha \in (D_x(H))_{|U}$ et soit $\beta \in D_x(H)$ tel que $\alpha = \beta \cap U$ (l'existence de β découle de la définition de la trace).
Supposons d'abord que $x \notin \alpha$. Alors $x \notin \beta$. Il existe $\gamma \in \{\beta, \beta \cup \{x\}\}$ tel que $\gamma \in H$ et donc $(\gamma \cap U) \setminus \{x\} \in D_x(H_{|U})$. Comme

$$(\gamma \cap U) \setminus \{x\} = \beta \cap U = \alpha$$

on en déduit que $\alpha \in D_x(H_{|U})$.
Supposons maintenant que $x \in \alpha$. Alors $x \in \beta$ et par définition du décalage, on a $\beta \in H$ et $\beta \setminus \{x\} \in H$. Par conséquent, $\beta \cap U$ et $(\beta \setminus \{x\}) \cap U = (\beta \cap U) \setminus \{x\}$ appartiennent tous deux à $H_{|U}$. Il s'ensuit que $\beta \cap U$ et $(\beta \cap U) \setminus \{x\}$ appartiennent tous deux à $D_x(H_{|U})$ et donc $\alpha \in D_x(H_{|U})$. Cela conclut la preuve.

Question 7. *Montrer que pour tout $x \in S$ on a* $\dim_{\mathrm{VC}}(D_x(H)) \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H)$.

Solution à la question 7. Soit $U \subseteq S$ pulvérisé par $D_x(H)$. D'après la question précédente on a $P(U) = (D_x(H))_{|U} \subseteq D_x(H_{|U}) \subseteq P(U)$. Remarquons que cela implique que U est pulvérisé par H. En effet, si $x \notin U$ alors $D_x(H_{|U}) = H_{|U} = P(U)$. Si $x \in U$ et $H_{|U} \neq P(U)$ alors il existerait $\alpha \subseteq U \setminus \{x\}$ tel que la paire $\{\alpha, \alpha \cup \{x\}\}$ n'est pas contenue dans $H_{|U}$, ce qui impliquerait que $\alpha \cup \{x\} \notin D_x(H_{|U})$, contredisant $D_x(H_{|U} = P(U)$. Ainsi, U est pulvérisé par H et donc $|U| \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H) - 1$. Cela est vrai pour tout $U \subseteq S$ pulvérisé par $D_x(H)$, donc $\dim_{\mathrm{VC}}(D_x(H)) \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H) - 1 + 1 = \dim_{\mathrm{VC}}(H)$.

Question 8. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on note $i \bmod n$ le reste de la division entière de i par n, c'est-à-dire que $i \bmod n$ est l'unique entier $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ satisfaisant $i = qn + r$. On considère la suite $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'hypergraphes définie par :*

$$\begin{cases} H_0 = H \\ H_i = D_{i \bmod n}(H_{i-1}) \text{ pour tout } i \geq 1 \end{cases}$$

a. Démontrer qu'il existe un entier $i_0 \in \mathbb{N}$ et un hypergraphe H^* de sommets S tel que :

$$\forall i \geq i_0, \qquad H_i = H^*.$$

b. Démontrer que $\max_{\alpha \in H^*} |\alpha| \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H) - 1$.

c. En déduire une nouvelle preuve de l'identité établie à la question 4(d) :

$$|H| \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n}{i}, \qquad \text{où} \quad d = \dim_{\mathrm{VC}}(H).$$

Solution à la question 8.

a. Pour tout hypergraphe H' de sommets S on note $w(H') = \sum_{\alpha \in H'} |\alpha|$ et on remarque que pour tout $x \in S$ on a

$$w(H') = \sum_{\alpha \subseteq S \setminus \{x\}} w(H' \cap S(\alpha, x))$$

Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $H_i \neq H_{i-1}$ et notons $x = i \bmod n$. D'après la question 5(a), pour tout $\alpha \subseteq S \setminus \{x\}$ on a soit $H_{i-1} \cap S(\alpha, x)) = H_i \cap S(\alpha, x))$ et donc $w(H_i \cap S(\alpha, x)) = w(H_{i-1} \cap S(\alpha, x))$, soit $w(H_i \cap S(\alpha, x)) < w(H_{i-1} \cap S(\alpha, x))$. De plus, comme $H_i \neq H_{i-1}$ le second cas se produit pour au moins un $\alpha \subseteq S \setminus \{x\}$. Il s'ensuit que $w(H_i) < w(H_{i-1})$. Comme w est à valeurs dans $\mathbb{N}$, la suite des $(w(H_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est ultimement stationnaire et il en va donc de même pour la suite des $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

b. On commence par montrer que pour tout $\alpha \in H^*$ et tout $\beta \subseteq \alpha$ on a $\beta \in H^*$. Soit $\alpha \in H^*$ et supposons qu'il existe $\beta \subseteq \alpha$ tel que $\beta \notin H^*$. On choisit un tel β maximum pour l'inclusion. Soit $x \in \alpha \setminus \beta$ (un tel x existe car $\alpha \in H^*$ garantit que $\beta \subsetneq \alpha$). Remarquons que $x \notin \beta \notin H^*$ et $\beta \cup \{x\} \in H^*$ (le contraire contredirait la maximalité de β). Par conséquent, $\beta \in D_x(H^*)$ et $\beta \cup \{x\} \notin D_x(H^*)$. Par conséquent, s'il existe $\beta \subseteq \alpha$ tel que $\beta \notin H^*$ alors $D_x(H^*) \neq H^*$. Comme, par définition de H^*, pour tout $x \in S$ on a $D_x(H^*) = H^*$, on obtient par contraposition que tout $\beta \subseteq \alpha$ appartient à H^*.
Ainsi, tout $\alpha \in H^*$ est pulvérisé par H^*. Ainsi, $\max_{\alpha \in H^*} |\alpha| \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H^*) - 1$. D'après la question 7, on a

$$d = \dim_{\mathrm{VC}}(H) = \dim_{\mathrm{VC}}(H_0) \geq \dim_{\mathrm{VC}}(H_1) \geq \ldots \geq \dim_{\mathrm{VC}}(H_{i_0}) = \dim_{\mathrm{VC}}(H^*),$$

et on a donc $\max_{\alpha \in H^*} |\alpha| \leq d - 1$.

c. On a d'abord, par une récurrence immédiate, que $|H| = |H^*|$. Comme tout élément de H^* a cardinal au plus $d-1$ et qu'il existe au plus $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de S de cardinal k, on a :

$$|H| = |H^*| \leq \sum_{i=0}^{\dim_{\mathrm{VC}}(H)-1} \binom{n}{i}.$$

Partie III

Question 9. **a.** *Montrer que toute intersection de sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$ est convexe.*

b. *Démontrer que pour tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$ les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est convexe,

(2) $A = \operatorname{conv}(A)$,

(3) $\forall n \geq 2, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in A, \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$.

c. *Démontrer que pour tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$ on a :*

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*, x_1, x_2, \ldots, x_n \in A, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Solution à la question 9.

a. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille (pas nécessairement dénombrable) d'ensembles convexes et posons $A = \bigcap_{i\in I} A_i$. Les inclusions $\forall i \in I, A \subseteq A_i$ et la convexité de chacun des A_i garantit que

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \forall i \in I, \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in A_i.$$

Par conséquent,

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in \bigcap_{i\in I} A_i = A$$

et A est convexe.

b. D'après la question 9(a), l'ensemble $\operatorname{conv}(A)$ est convexe. Donc $\operatorname{conv}(A) = A$ implique que A est convexe et donc (2) $\Rightarrow$ (1). Réciproquement, $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$ par définition et si A est convexe alors comme A contient A, on obtient $\operatorname{conv}(A) \subseteq A$. On a par conséquent que (1) $\Rightarrow$ (2) et donc (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Le cas particulier $n = 2$ de l'hypothèse (3) implique immédiatement que A est convexe, donc (3) $\Rightarrow$ (1). Supposons A convexe. Soient $n \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. On montre par récurrence sur n que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$. Pour $n = 2$ c'est immédiat car $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Supposons la propriété vraie pour $n-1$. Comme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \right) x + \lambda_n x_n \qquad \text{avec } x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j} x_i.$$

Par hypothèse de récurrence, $x \in A$ et on a donc (1) $\Leftrightarrow$ (3).

Question 10.

a. *Montrer que tout demi-espace fermé de $\mathbb{R}^d$ est convexe.*

b. *Montrer que pour tout sous-ensemble X de $\mathbb{R}^d$ et tout demi-espace fermé D de $\mathbb{R}^d$:*

$$D \cap \operatorname{conv}(X) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad D \cap X \neq \emptyset$$

Solution à la question 10.

a. Soit D un demi-espace fermé et soient $c \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $D = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot c \leq t\}$. Pour tous $x, y \in D$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a

$$(\lambda x + (1-\lambda) y) \cdot c = \lambda x \cdot c + (1-\lambda) y \cdot c \leq \lambda t + (1-\lambda) t = t$$

et donc $\lambda x + (1-\lambda) y \in D$. D'après la question 9(a), D est convexe.

b. L'implication $\Leftarrow$ découle de l'inclusion $X \subseteq \operatorname{conv}(X)$. Réciproquement, supposons que $D \cap X = \emptyset$ où $D = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot c \leq t\}$. Alors pour tout $x \in X$ l'on a $x \cdot c > t$. Soit $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Comme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \cdot c = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \cdot c > \sum_{i=1}^n \lambda_i t = t$$

et donc $y \notin D$. Il s'ensuit que si $D \cap X = \emptyset$ alors $D \cap \operatorname{conv}(X) = \emptyset$ et donc $\Rightarrow$ est vraie par contraposition.

Question 11. *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ des vecteurs deux à deux distincts.*

a. *Montrer que si $n \geq d+2$ alors il existe n réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \vec{0}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.*

b. *En déduire que si $n \geq d+2$ alors l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ admet une partition en deux sous-ensembles non-vides V_1 et V_2 tels que $\operatorname{conv}(V_1) \cap \operatorname{conv}(V_2)$ est non vide.*

Solution à la question 11.

a. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$ on définit $y_i = (x_i, 1)$, c'est-à-dire que y_i est un vecteur de $\mathbb{R}^{d+1}$ dont les d premières coordonnées coincïdent avec celles de x_i et dont la $(d+1)$ − ième coordonnée est 1. La famille $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ compte au moins $d+2$ vecteurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ et est donc liée. Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \vec{0}$. En particulier, si l'on considère séparément les d premières coordonnées et la $(d+1)$ème coordonnée, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0.$$

b. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \vec{0}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. On définit $P = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \lambda_i > 0\}$ et $N = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \lambda_i < 0\}$. Le fait que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ et que les λ_i ne sont pas tous nuls garantit que P et N sont tous deux non vides. On a :

$$\sum_{i \in P} \lambda_i x_i = \sum_{j \in N} (-\lambda_j) x_j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i \in P} \lambda_i = \sum_{j \in N} (-\lambda_j).$$

On peut donc diviser la première identité par $\sum_{i \in P} \lambda_i$ à droite et par $\sum_{j \in N} (-\lambda_j)$ à gauche, la seconde identité garantissant que ces deux grandeurs sont égales, pour obtenir :

$$\sum_{i \in P} \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in P} \lambda_i} x_i = \sum_{j \in N} \frac{-\lambda_j}{\sum_{j \in N} \lambda_j} x_j$$

Si l'on pose $V_i = \{x_i \mid i \in P\}$ et $V_2 = \{x_i \mid i \in N\}$, l'identité ci-dessus donne deux combinaisons convexes, une de V_1 et l'autre de V_2, qui sont égales. Par conséquent les enveloppes convexes de V_1 et V_2 ont une intersection non vide. En distribuant les x_i pour lesquels $\lambda_i = 0$ arbitrairement entre V_1 et V_2, on obtient la partition voulue.

Question 12. *Soit S un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$ et soit H l'hypergraphe de sommets S défini par $H = \{S \cap D \mid D \in \mathcal{D}_d\}$. Montrer que* $\dim_{\mathrm{VC}}(H) \leq d + 2$.

Solution à la question 12. Soit X un sous-ensemble de S de cardinal $n \geq d + 2$. D'après la question 11(b) il existe une partition de X en V_1 et V_2 tels que $\operatorname{conv} V_1 \cap \operatorname{conv} V_2 \neq \emptyset$. On remarque que tout demi-espace fermé qui contient V_1 contient aussi au moins un vecteur de V_2. En effet, pour tout $D \in \mathcal{D}_d$, si $V_1 \subseteq D$ alors (d'après la question 10(b)) $\operatorname{conv}(V_1) \subseteq D$ et donc $\operatorname{conv}(V_2) \cap D \neq \emptyset$ et donc (d'après la question 10(b)) $V_2 \cap D \neq \emptyset$. Il s'ensuit que $V_1 \notin H_{|X}$ et donc $H_{|X} \neq P(X)$. Donc, tout sous-ensemble $Y \subseteq S$ tel que $H_{|Y} = P(Y)$ a cardinal au plus $d + 1$ et $\dim_{\mathrm{VC}}(H) \leq d + 2$.

Question 13. *Soit $n \geq 2$. Soit $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ sont des vecteurs de norme 1 deux à deux distincts. Calculer la dimension VC de l'hypergraphe H de sommets S défini par $H = \{S \cap C \mid C \in \mathcal{C}_2\}$. On justifiera la réponse.*

Solution à la question 13. On remarque tout d'abord que l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si les vecteurs sont positivement colinéaires, soit (en utilisant que x_1 est de norme 1 et donc non nul) :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \sum_{i=1}^n \|\lambda_i x_i\| \quad \Leftrightarrow \quad \forall 2 \leq i \leq n, \exists \mu_i \in \mathbb{R}^+, x_i = \mu_i x_1.$$

Comme $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ sont des vecteurs de norme 1 deux à deux distincts, aucun sous-ensemble n'est positivement colinéaire et pour tout $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, les seuls vecteurs de $\operatorname{conv}(\{x_i \mid i \in I\})$ de norme 1 sont précisément les x_i avec $i \in I$. Par conséquent,

$$\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \quad S \cap \operatorname{conv}(\{x_i \mid i \in I\}) = \{x_i \mid i \in I\}$$

et donc $\{x_i \mid i \in I\} \in H$. Il s'ensuit que $H = P(S)$ et $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = n + 1$.

Partie IV

Question 14. *Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{C}_d$.*

a. *On suppose que $n \geq d + 2$ et que pour tout sous-ensemble $I \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$ de cardinal $n - 1$, l'ensemble $\cap_{i \in I} C_i$ est non vide. En déduire que l'ensemble $\cap_{i=1}^n C_i$ est non-vide.*

> ***Indication :*** *on pourra fixer, de manière arbitraire, pour tout $1 \leq k \leq n$, un vecteur $x_k \in \cap_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}} C_i$ et utiliser la question 11 (b).*

b. *Montrer que si $n \geq d + 2$ et que pour tout sous-ensemble $I \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$ de cardinal $d + 1$, l'ensemble $\cap_{i \in I} C_i$ est non vide, alors l'ensemble $\cap_{i=1}^n C_i$ est non-vide.*

Solution à la question 14.

a. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on définit $x_k \in \cap_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}} C_i$ (un tel vecteur existe par hypothèse). D'après la question 11 (b), il existe une partition de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en deux parties V_1 et V_2 non vides et un vecteur $y \in \operatorname{conv}(V_1) \cap \operatorname{conv}(V_2)$. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Comme pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ l'on a $x_j \in C_i$, si $x_i \in V_1$ alors $\operatorname{conv}(V_2) \subseteq C_i$. De même, si $x_i \in V_2$ alors $\operatorname{conv}(V_1) \subseteq C_i$. Dans les deux cas on obtient que $y \in C_i$, ce qui implique que y appartient à l'intersection $\cap_{i=1}^n C_i$.

b. Pour $k \in \{d+1, d+2, \ldots, n\}$ notons $\phi(k)$ la propriété "*pour tout, pour tout sous-ensemble $I \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$ de cardinal k, l'ensemble $\cap_{i \in I} C_i$ est non vide*". Par hypothèse $\phi(d+1)$ est vrai. De plus, pour tout $k \in \{d+1, d+2, \ldots, n-1\}$, si $\phi(k)$ est vraie alors, d'après la question (a), $\phi(k+1)$ est vraie. Il s'ensuit donc, par le principe de récurrence, que $\phi(k)$ est vraie pour tout $k \in \{d+1, d+2, \ldots, n\}$ et en particulier, $\phi(n)$ donne que l'ensemble $\cap_{i=1}^n C_i$ est non-vide.

Question 15. *Soit $S \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble de cardinal n. Un* point central *de S est un élément $c \in \mathbb{R}^d$ (pas nécessairement dans S) tel que tout demi-espace fermé contenant c contient au moins $\frac{n}{d+1}$ éléments de S.*

a. *Montrer qu'un vecteur $c \in \mathbb{R}^d$ est un point central de S si et seulement si c appartient à tout demi-espace ouvert D contenant strictement plus de $\frac{dn}{d+1}$ vecteurs de S.*

b. *On définit*

$$\mathcal{C}(S) = \left\{ \mathrm{conv}(D \cap S) \mid D \textit{ demi-espace ouvert tel que } |D \cap S| > \frac{dn}{d+1} \right\}$$

c'est-à-dire que les éléments de $\mathcal{C}(S)$ sont les enveloppes convexes de sous-ensembles de S contenus dans un demi-espace ouvert D contenant strictement plus que $\frac{dn}{d+1}$ vecteurs de S. Montrer que pour tous $C_1, C_2, \ldots, C_{d+1} \in \mathcal{C}(S)$ l'intersection $\cap_{i=1}^{d+1} C_i$ est non-vide.

c. *Montrer que tout ensemble fini $S \subseteq \mathbb{R}^d$ de cardinal $n \geq d+1$ admet un point central.*

Solution à la question 15.

1. Supposons que c est un point central de S et soit D un demi-espace ouvert contenant strictement plus de $\frac{nd}{d+1}$ vecteurs de S. Si l'on note $D = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot c < t\}$, alors le complémentaire de D est $D^c = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot (-c) \leq -t\}$. On reconnaît que D^c est un demi-espace fermé. Comme D^c contient strictement moins de $\frac{n}{d+1}$ vecteurs de S, il ne peut donc contenir c. Il s'ensuit que c doit appartenir à D, ce qui prouve l'implication $\Rightarrow$.

   Réciproquement, supposons que c appartient à tout demi-espace ouvert contenant strictement plus de $\frac{nd}{d+1}$ vecteurs de S. Si D est un demi-espace fermé contenant c alors le complémentaire de D est un demi-espace ouvert ne contenant pas c. Par conséquent, le complémentaire de D doit contenir au plus $\frac{nd}{d+1}$ vecteurs de S et D doit contenir au moins $\frac{n}{d+1}$ vecteurs de S. Ainsi, tout demi-espace fermé contenant c contient au moins $\frac{n}{d+1}$ vecteurs de S, et c est donc un point central.

2. Soit D_i un demi-espace ouvert tel que $C_i = \mathrm{conv}(D_i \cap S)$. Remarquons que pour tout $x \in S$, si pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ on a $x \in D_i$ alors $x \in \cap_{i=1}^{n} C_i$. Or, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ il existe strictement moins de $\frac{n}{d+1}$ vecteurs de S n'appartenant pas à D_i. Ainsi, il existe strictement moins de $(d+1)\frac{n}{d+1} = n$ vecteurs de S n'appartenant pas à tous les $D_1, D_2, \ldots, D_{d+1}$ et donc il existe forcément au moins un vecteur de S dans $\cap_{i=1}^{n} C_i$, qui est donc non-vide.

3. L'ensemble $\mathcal{C}(S)$ est un ensemble fini (de cardinal au plus $|P(S)|$) de sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$. D'après (b), tout sous-ensemble de $d+1$ éléments de $\mathcal{C}(S)$ a une intersection non-vide. Donc, d'après la question 14 (b) l'intersection $\cap_{C \in cC(S)} C$ est non vide ; soit y un vecteur de cette intersection. Par définition de $\mathcal{C}(S)$, y appartient à tout demi-espace ouvert tel que contenant strictement plus de $\frac{dn}{d+1}$ vecteurs de S. Ainsi, d'après le (a), y est un point central de S.

Question 16. *Montrer que la méthode $(\mathcal{M})$ termine et majorer le cardinal de l'ensemble T retourné.*

Solution à la question 16. Considérons le déroulement de la méthode et notons $T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$ la séquence des ensembles T obtenus. Notons N_k le nombre de triangles de S qui entourent au moins un vecteur de T_k. Initialement $T_1 = \emptyset$ et $N_k = 0$.

Notons que si $C \in \mathcal{C}_2$ est tel que $|C \cap S| \geq \varepsilon |S|$ et $C \cap T_k = \emptyset$ alors aucun des triangles de $C \cap S$ n'entoure aucun des vecteurs de T_k. Ainsi, si $N_k > \binom{n}{3} - \binom{\varepsilon n}{3}$ il n'existe aucun $C \in \mathcal{C}_2$ satisfaisant les conditions ci-dessus et la méthode termine.

Il reste à minorer l'incrément de N_k produit par l'ajout d'un point central c de $C \cap S$. D'après le lemme de sélection, le nombre de triangles de $C \cap S$ qui entourent c est au moins $\frac{2}{9}\binom{|C \cap S|}{3}$, donc au moins $\frac{2}{9}\binom{\varepsilon n}{3}$. Comme chaque triangle de $C \cap S$ est un triangle de S, il s'ensuit que

$$N_{k+1} \geq N_k + \frac{2}{9}\binom{\varepsilon n}{3}.$$

Ainsi, la méthode s'arrête après au plus $\frac{\binom{n}{3} - \binom{\varepsilon n}{3}}{\frac{2}{9}\binom{\varepsilon n}{3}} \leq \frac{18}{\varepsilon^3}$ étapes d'ajout d'un point central. Le cardinal de l'ensemble T retourné est elle aussi majorée par $\frac{18}{\varepsilon^3}$.