Rapport du jury de l'épreuve orale de mathématiques Filière PC Concours 2014

François Brunault, Mikael De La Salle, Louis Dupaigne, Emmanuel Grenier

1 Commentaires généraux

L'épreuve orale de mathématiques s'est déroulée dans les locaux de l'ENS de Lyon, en parallèle avec les travaux pratiques de chimie. Il s'agit d'une épreuve de 45 minutes, sans préparation. Il y a eu 216 candidats présents.
Le niveau global des candidats est satisfaisant et assez homogène, avec toutefois quelques candidats très brillants et quelques autres trop faibles pour le niveau attendu du concours.
Sur les questions de forme, on rappelle aux candidats de bien écouter l'énoncé de la question posée avant de commencer à y répondre: celui-ci a peu de chance de correspondre à un exercice-type que le candidat pense connaître, même s'il est pertinent de faire des liens lorsqu'ils existent. Certains candidats ne pensent pas à s'écarter régulièrement du tableau, d'autres se retournent constamment vers l'examinateur pour faire valider leurs calculs. Entre ces deux extrêmes, la majorité des candidats organisent leur tableau et leur temps de parole de manière satisfaisante, peut-être même de manière parfois trop professionnelle. La rédaction et la formalisation restent des obstacles pour nombre de candidats: certains ne savent pas introduire de notations pertinentes quand d'autres sont trop contraints par la rigueur qu'ils s'imposent : ils n'arrivent pas à prendre le recul nécessaire pour aboutir sur les questions délicates.
Sur le fond, comme l'année précédente, l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz et la différentiation des fonctions vectorielles de plusieurs variables ne sont pas assez maitrisées. La formule de Taylor ou la diagonalisation d'une matrice dont les coefficients ne sont pas explicites posent souvent problème. On note enfin parfois des lacunes étonnantes: certains candidats ne savent visiblement pas manipuler la valeur absolue dans les estimations ou peinent à fournir des contre-exemples élémentaires. On se réjouit toutefois du nombre important de candidats faisant preuve d'intuition et sachant

utiliser l'interprétation géométrique pour aboutir, tant en analyse qu'en algèbre linéaire, même s'ils n'arrivent pas toujours ensuite à formaliser leurs idées en toute rigueur.

2 Quelques exercices posés

Exercice 1

Soit A une matrice diagonalisable, à valeurs propres réelles. On suppose de surcroît que

$$\forall i,\ a_{i,i} = 1,\ \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \leq 1$$

Montrer que $\det A \in [0, 1]$

Exercice 2

Soit f une fonction positive, continue et bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On pose

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, v)dv, \quad x \in \mathbb{R},$$

et on suppose que $\rho(x)$ est bien définie pour tout x.

1. La fonction ρ est-elle nécessairement bornée ? De même, on définit

$$\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} |v|^2 f(x, v)dv, \quad x \in \mathbb{R},$$

   et on suppose $\mu(x)$ bien définie pour tout x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose qu'il existe des constantes C, q, r, α positives telles que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |\rho(x)|^q dx\Big)^{1/q} \leq C\|f\|_\infty^r \Big(\int_{\mathbb{R}} \mu(x)dx\Big)^\alpha. \tag{1}$$

   Déterminer q, r, α. *Indication:* on pourra considérer, pour $\lambda, \theta, \gamma > 0$,

$$f_{\lambda,\theta,\gamma}(x, v) := \gamma f(\lambda x, \theta v).$$

3. Prouver alors (1). *Indication:* pour un $R > 0$, décomposer

$$\rho(x) = \int_{\{|v|\leq R\}} f(x, v)dv + \int_{\{|v|>R\}} f(x, v)dv$$

Exercice 3

- Soit $A(t)$ une matrice symétrique dépendant continûment de t. Est ce que les vecteurs propres sont continus ?

- Soit A_0 et A_1 deux matrices symétriques à valeurs propres distinctes. Montrer qu'on peut les relier par un chemin qui évite les matrices à valeurs propres doubles.