

# RAPPORT DU JURY

OLIVIER SCHIFFMANN  
(ORAL MPI ULM)

## 1. Commentaires généraux :

Un des buts de l'oral MPI Ulm est d'évaluer, outre les connaissances et la maîtrise technique des candidats, leur capacité à comprendre et interpréter des situations mathématiques nouvelles, et à utiliser les outils mathématiques dont ils disposent dans ces situations nouvelles. L'oral s'écarte ainsi parfois du format traditionnel, et il arrive que l'examineur pose au candidat un problème volontairement déroutant, soit parce qu'il met en jeu des objets mathématiques dont le candidat n'a pas l'habitude, soit parce que le problème est posé de façon 'brute', sans indications ou suite de questions préliminaires, soit même parce que le problème est posé de façon quelque peu imprécise. L'examineur attend alors du candidat non pas une solution complète du problème posé mais plutôt d'abord une compréhension de celui-ci, une esquisse d'approche possible, quelques arguments de réduction, un raisonnement par analogie avec une situation plus familière, etc... Dans ce cas, l'oral s'oriente plus vers un échange entre le candidat et l'examineur. Il arrive par exemple que l'examineur laisse, voire même encourage le candidat à poursuivre son idée de résolution de l'exercice s'il juge celle-ci raisonnable, même si il pense que cette approche est *in fine* vouée à l'échec; que cette idée amène finalement à la résolution du problème ou pas importe moins que les raisonnements faits par le candidat, l'imagination et le 'sens mathématique' dont il aura su faire preuve en chemin.

En ce qui concerne les différentes parties du programme, l'examineur a constaté que les principes et le langage de la théorie des probabilités, récemment ajoutés au programme, sont en général très bien compris par les candidats (probabilités et espérance conditionnelles, événements indépendants, propriétés des tribus, lois standards, ...). Les domaines de l'analyse 'fonctionnelle' et de la topologie (espaces compacts, espaces convexes, ...) sont également en général bien compris par les candidats. Par contre, l'examineur note une (relative) faiblesse des candidats dans les questions d'analyse impliquant des équations différentielles ou intégrales, et encore plus dans les questions d'algèbre ou d'arithmétique (par exemple, plusieurs candidats ont eu du mal à appliquer le lemme de Gauss, ou à décrire les diviseurs d'un produit  $ab$  avec  $a, b$  premiers entre eux). Le niveau des candidats en algèbre linéaire (lemme des noyaux, réduction des endomorphismes, etc...) reste bon.

## 2. Quelques conseils :

-Rester concentré jusqu'au bout de l'oral ! Il arrive souvent que la fin de l'oral soit riche en enseignements sur le candidat pour l'examineur : capacité à mettre bout à bout tous les arguments, à comprendre le problème dans sa globalité, etc...

-Il est important de tenir l'examineur informé de ses réflexions, même si celles-ci ne sont pas totalement abouties. Mais il ne faut pas tomber dans l'excès inverse en inondant l'examineur de commentaires ou d'impressions trop imprécises.

-Une mauvaise gestion du tableau peut donner à l'examineur l'impression que le candidat est confus et désordonné. Il est possible d'utiliser une partie du tableau comme brouillon, mais il importe alors de la séparer du reste.

-Ne pas se décourager si une première approche tentée s'avère infructueuse. Comme expliqué plus haut, la méthode compte *in fine* plus que le résultat, et l'examineur peut juger très favorablement une tentative imaginative de résolution d'un problème même si celle-ci ne va pas au bout.

-Les exercices posés à l'oral ne sont *en général* pas techniques, et leur résolution n'implique que très rarement de longs calculs. Il est donc inutile de se lancer dans une suite sans fin d'équations avant d'avoir une idée précise de ce que l'on veut obtenir, et sans avoir au préalable cherché une méthode plus conceptuelle.

### 3. Quelques exercices posés :

**Exercice :** Soient  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  et  $K = \text{Conv}\{x_1, \dots, x_r\}$  leur enveloppe convexe. On pose

$$K^+ = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \mid \forall i, \lambda_i > 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}.$$

À quelle condition a-t-on  $K^+ = K^\circ$  ?

**Commentaire :** Cet exercice, dont le résultat est très intuitif, peut se résoudre de nombreuses façons différentes. Dans ces conditions, l'examineur a laissé les candidats développer leurs propres idées, et se rendre compte par eux-mêmes des éventuelles difficultés rencontrées. Certains candidats ont utilisé avec succès la notion de face (qu'ils ont préalablement définie rigoureusement) et ont montré que  $K^\circ$  est le complémentaire de l'union des faces de  $K$  (lorsque ce dernier est de dimension  $n$ ). D'autres ont explicitement construit une expression strictement positive de tout point de  $K^\circ$  par des moyennes judicieuses. Cet exercice a été dans l'ensemble bien réussi par les candidats.  $\square$

**Exercice :** i) Soit  $X$  un ensemble fini à  $n$  éléments. On dit qu'une famille  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  de parties de  $X$  est une *antichaine* si  $\forall I, J \in \mathcal{A}, I \neq J$  on a  $I \not\subseteq J$  et  $J \not\subseteq I$ . Montrer que si  $\mathcal{A}$  est une antichaine alors

$$\text{Card}(\mathcal{A}) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

ii) Soient  $x_1, \dots, x_r$  des réels non nuls et soient  $\xi_1, \dots, \xi_r$  des variables aléatoires indépendantes valant respectivement  $x_i$  ou  $-x_i$  avec probabilité  $1/2$ . Montrer que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \text{P} \left( \sum_i \xi_i = y \right) \leq \frac{1}{2^r} \binom{r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}.$$

iii) Soient  $a_1, \dots, a_r$  des vecteurs d'un espace euclidien  $E$ , et soient  $R_1, \dots, R_k \subset E$  des régions vérifiant  $\text{diam}(R_i) < 1$  pour  $i = 1, \dots, k$ . On pose  $R = \bigcup_i R_i$ . Montrer que

$$\text{Card} \left\{ (\epsilon_i)_i \in (0, 1)^r \mid \sum_i \epsilon_i a_i \in R \right\} \leq N(r, k)$$

où  $N(r, k)$  désigne la somme des  $k$  plus grand nombres binomiaux  $\binom{r}{i}$ .

**Commentaire :** La première partie de cet exercice peut être résolue de façon combinatoire, ce qu'un candidat a très bien réussi à mettre en œuvre. L'examinateur a par ailleurs suggéré une approche basée sur des idées de probabilité, ce qui a été inégalement traitée. La deuxième partie de l'exercice est une application de la première. La troisième partie, posée en exercice à un seul candidat (ayant très bien réussi les deux premières), repose sur un ingénieux argument de récurrence. L'exercice permet à l'examinateur de juger des capacités du candidat à formaliser et résoudre un problème combinatoire, ou d'appliquer à celui-ci des idées ou outils de probabilités.  $\square$

**Exercice :** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I, I)$  où  $I = [0, 1]$ . On note  $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $k$  fois). On dit que  $x$  est un point périodique de  $f$  de période  $k$  si  $f^k(x) = x$  et  $f^l(x) \neq x$  pour  $1 < l < k$ . Soient  $f, f_1, f_2, \dots$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}^1(I, I)$ , et  $x, x_1, x_2, \dots$  une suite de points de  $I$  satisfaisant :

a)

$$\sup_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)| + |f'_n(x) - f'(x)|) \longrightarrow 0$$

quand  $n$  tend vers l'infini,

b) pour tout  $i \geq 1$ ,  $x_i$  est un point périodique de  $f_i$  de période  $k$ ,

c)  $x_i \longrightarrow x$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Montrer que  $x$  est un point périodique de  $f$  de période  $k$  ou  $k/2$ .

**Commentaire :** Cet exercice a dérouté la plupart des candidats, qui n'ont pas l'habitude de considérer des problèmes de dynamique. Les candidats ont en général bien su utiliser la condition a) pour montrer que  $x$  est un point périodique de  $f$  de période divisant  $k$ , et pour montrer que la suite des  $f'_n$  converge (au sens  $\mathcal{C}^1$ ) vers  $f'$ . Par contre, la plupart des candidats n'ont pas su relier l'existence de plusieurs points fixes de  $f^{k/d}$  au voisinage de  $x$  à une condition sur la dérivée de  $f^{k/d}$  en  $x$ . Cet exercice a permis à l'examinateur de juger de la capacité du candidat à utiliser des notions bien connues (accroissements finis, arguments de continuité) dans une situation nouvelle (dynamique). Un candidat a vu que le signe de la dérivée de  $f^{k/2}$  en  $x$  permettait de déterminer précisément la période de  $x$ .  $\square$

**Exercice :** Soient  $K_1, \dots, K_r$  des convexes compacts de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^+$  on pose

$$\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_r K_r = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \mid x_i \in K_i\}.$$

Quelle est la nature de la fonction

$$\Phi : (\mathbb{R}^+)^r \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\lambda_i)_i \mapsto \text{Vol}(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_r K_r) ?$$

**Commentaire :** Cet exercice a été assez bien traité dans l'ensemble. Une des difficultés ici réside dans la notion de volume –que l'examinateur a défini de manière rigoureuse dans le cas des ensembles compacts convexes à la demande de certains candidats– : bien que très intuitive, plusieurs candidats ont eu du mal à en utiliser les propriétés essentielles (additivité par rapport à un découpage en union de convexes compacts, homogénéité), qui suffisent à résoudre l'exercice. L'idée (essentielle ici) d'approximer un convexe compact par une suite de polyèdres a été trouvée par plusieurs candidats, et suggérée aux autres.  $\square$

**Exercice :** Soit  $X$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues réelles sur  $X$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et  $\mathcal{L}(X)$  l'espace des endomorphismes continus de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . On dit qu'une fonction  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  est positive si  $\forall x \in X, f(x) \geq 0$  et qu'un opérateur  $L \in \mathcal{L}(X)$  est positif si il préserve l'ensemble des fonctions positives. Enfin, si  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  on pose

$$Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

i) Soient  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  positifs tels que  $Z(\alpha) \supset Z(\beta)$ . Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $M > 0$  tel que  $\alpha(x) \leq \epsilon + M\beta(x)$  pour tout  $x \in X$ .

ii) Pour  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  on pose

$$\Delta(f) = \{(x, y) \in X^2 \mid f(x) = f(y)\}.$$

Une fonction positive  $\gamma \in \mathcal{C}(X^2, \mathbb{R})$  est dite majorante pour  $f$  si  $Z(\gamma) \subset \Delta(f)$ . Dans ce cas, on pose  $\gamma_t \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), x \mapsto \gamma(t, x)$ . Soit  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ,  $\gamma$  une fonction majorante pour  $f$  et  $L_n \in \mathcal{L}(X)$  une famille d'opérateurs positifs tels que

- $L_n(1) \rightarrow 1$  quand  $n$  tend vers l'infini (pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ),
- $L_n(\gamma_t)(t) \rightarrow 0$  quand  $n$  tend vers l'infini, uniformément en  $t$ .

Montrer que  $L_n(f) \rightarrow f$  quand  $n$  tend vers l'infini.

iii) Application : soient  $K$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  et  $\xi \in K$ . Montrer que la suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  définie par

$$f_n(x) = \int_0^1 ns^n f((1-s)\xi + sx) ds$$

converge uniformément vers  $f$  quand  $n$  tend vers l'infini.

**Commentaire :** Cet exercice a été assez bien résolu dans l'ensemble. Les candidats qui ont pris le temps de bien comprendre l'énoncé et de faire quelques exemples ont assez vite vu comment traiter le cas général. D'autres n'ont pas réussi à comprendre la notion de fonction majorante et n'ont traité que le i). Cet exercice permet à l'examinateur de juger de l'aptitude des candidats à comprendre et assimiler des définitions nouvelles –les arguments eux-même étant assez standards.  $\square$

**Exercice :** Soient  $F, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  deux fonctions continues, croissantes. Soient  $\lambda, \mu \in [0, 1]$  tels que  $\lambda\mu < 1$ . Soit  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue vérifiant  $v(0) \leq 0$  et

$$v(t) \leq tF(t) + \int_0^t g(s)v(s)ds + \lambda v(\mu t), \quad \forall t \geq 0.$$

Montrer que

$$v(t) \leq \rho t F(t) e^{\rho G(t)}, \quad \forall t \geq 0$$

où  $\rho = 1/(1 - \lambda\mu)$  et  $G(t) = \int_0^t g(s)ds$ .

**Commentaire :** Cet exercice a posé de nombreux problèmes aux candidats. Si tous les candidats ont vu la similarité avec le lemme de Gronwall, peu ont su par quel bout prendre le problème. Par exemple, peu ont cherché à résoudre le cas d'égalité et peu se sont aperçus que la fonction  $\rho t F(t) e^{\rho G(t)}$  vérifie une inégalité (inverse) de celle vérifiée par  $v(t)$ .  $\square$

**Exercice :** On note

$$l^1 = \{(a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_i |a_i| < \infty\},$$

$$l^\infty = \{(a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_i |a_i| < \infty\}.$$

On munit respectivement ces deux espaces vectoriels des normes

$$\|(a_i)_i\|_1 = \sum_i |a_i|, \quad \|(a_i)_i\|_\infty = \sup_i |a_i|.$$

i) Montrer que pour tout  $b = (b_i)_i \in l^\infty$  la forme linéaire

$$\phi_b : (a_i)_i \mapsto \sum_i b_i a_i$$

est bien définie et continue, et que l'application  $b \mapsto \phi_b$  est un isomorphisme continue de  $l^\infty$  dans l'ensemble  $\mathcal{L}(l^1, \mathbb{R})$  des formes linéaires continues sur  $l^1$ .

ii) Soit  $a^{(k)}$  une suite d'éléments de  $l^1$ , et soit  $a \in l^1$ . On suppose que pour toute forme linéaire continue  $\lambda \in \mathcal{L}(l^1, \mathbb{R})$ , la suite  $\lambda(a^{(k)})$  converge vers  $\lambda(a)$ . Montrer que la suite  $a^{(k)}$  converge vers  $a$  dans  $l^1$ .

**Commentaire :** La première partie, déjà connue par certains candidats a été très bien traitée dans l'ensemble. Par contre peu de candidats ont vu l'intérêt d'appliquer des formes linéaires  $\phi_b$  avec  $b$  à support non fini (ou  $b$  non constant à l'infini), et donc peu de candidats ont su résoudre le problème.  $\square$

**Exercice :** On dit qu'une famille  $\{A_1, \dots, A_k\}$  de  $End(\mathbb{C}^n)$  est approximativement simultanément diagonalisable (a.s.d.) si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\{B_1, \dots, B_k\}$  simultanément diagonalisables tels que  $|A_i - B_i| < \epsilon$  pour tout  $i$ . Ici  $|\cdot|$  désigne une norme fixée de  $End(\mathbb{C}^n)$ . i) Montrer que  $\{A\}$  est a.s.d. pour tout  $A \in End(\mathbb{C}^n)$ .

ii) Quelles sont les propriétés topologiques de l'ensemble  $X_k \subset End(\mathbb{C}^n)^k$  des  $k$ -uplets d'endomorphismes a.s.d. (ouvert, fermé, connexe par arc) ?

iii) Soit  $\mathcal{A} \subset End(\mathbb{C}^n)$  une sous-algèbre commutative engendrée par une famille d'endomorphismes a.s.d. Montrer que  $\dim \mathcal{A} \leq n$ .

iv) Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre commutative maximale pour l'inclusion. Montrer que si  $\mathcal{A}$  est engendrée par une famille d'endomorphismes a.s.d. alors  $\dim \mathcal{A} = n$ .

v) Montrer que toute paire  $\{A_1, A_2\}$  vérifiant  $A_1 A_2 = A_2 A_1$  est a.s.d. En déduire le résultat suivant : toute sous-algèbre de  $End(\mathbb{C}^n)$  engendrée par deux éléments est de dimension au plus  $n$ .

**Commentaire :** C'est un exemple typique d'exercice long, aux questions de difficulté croissante. Les candidats ont eu du mal à mêler des arguments de topologie et d'algèbre linéaire (pour montrer par exemple la semi-continuité du rang d'une application linéaire dans une famille). Les candidats ont également du mal à utiliser la caractérisation du rang d'une matrice en terme de mineurs de matrices extraites. Par contre, les arguments de réduction à des sous-espaces caractéristiques sont bien maîtrisés. Un candidat a atteint la dernière question, qu'il a su ramener au cas de matrices nilpotentes dont l'une est cyclique.  $\square$

**Exercice :** Soit  $(E, \Omega)$  un espace de probabilité, et  $A_1, \dots, A_n$  des événements arbitraires. Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , notons  $C_k$  l'évènement que au moins  $k$  parmi  $A_1, \dots, A_n$  se produisent. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n P(C_k) \leq \prod_{k=1}^n P(A_k).$$

[Indication : on pourra étudier les propriétés (notamment par rapport à la composition) de l'opérateur  $C$  qui à une famille d'évènements  $A'_1, \dots, A'_{k'}$  associe la famille  $C'_1, \dots, C'_{k'}$ .]

**Commentaire :** Les candidats ont aussi eu beaucoup de mal avec cet exercice. S'il est formulé en termes de probabilités, ce problème est plus proche de la combinatoire. Plusieurs candidats se sont perdus dans des considérations de probabilités conditionnelles et ont essayé en vain de s'en sortir avec des manipulations formelles de ces concepts. Peu de candidats ont considéré le cas crucial  $n = 2$ , et même ce cas a posé des problèmes. Après avoir remarqué que l'opérateur  $C$  est idempotent, la plupart des candidats ont eu l'idée d'appliquer l'inégalité pour  $n = 2$  'localement' et d'en déduire l'inégalité souhaitée au bout de  $n(n-1)/2$  itérations.  $\square$