Rapport sur l'oral de Mathématiques 2015

Oral commun Cachan-Lyon-Paris-Rennes : les examinateurs sont Yves de Cornulier, David Gérard-Varet, Vincent Minerbe, Michel Raibaut. Nombre de candidats ayant passé l'épreuve: 431. Chaque candidat est interrogé 45 minutes au tableau par l'un des quatre examinateurs.

1 Commentaires sur le déroulement des épreuves

- Un but essentiel de l'oral est de juger de la capacité du candidat à analyser un problème. Comprendre où se situe la difficulté, faire des parallèles avec d'autres problèmes déjà connus, discuter du problème dans des cas particuliers pertinents est très apprécié. A ce titre, prendre quelques minutes pour étudier l'énoncé, sans se lancer tambour battant dans des calculs ou un raisonnement formaté peut être une bonne option. Par exemple, un énoncé contenant un entier naturel ne se prouve pas toujours par récurrence.

- Néanmoins, discuter le problème, expliquer une stratégie en attendant l'assentiment de l'examinateur ne suffit pas. Essayer de résoudre entièrement un problème à l'oral, sans rien écrire, se révèle souvent contre-productif. Il est donc important d'écrire progressivement son (début de) solution, de poser nettement les choses, d'établir fermement les étapes du raisonnement. Entretenir un certain flou est la meilleure façon de commettre des erreurs et de ne pas convaincre l'examinateur. Au contraire, une argumentation claire et progressive sera fortement valorisée.

- Faire des dessins, même dans des cas particuliers, même de façon simpliste, est souvent inspirant. Ce devrait être une initiative naturelle. Il est frappant de constater que nombre de candidats sont immédiatement débloqués quand l'examinateur leur donne comme indication de faire un dessin.

- Les examinateurs ont été surpris de l'attitude peu combative de certains candidats, qui semblent attendre qu'on leur dise quoi faire. Ne montrer aucune motivation dans son attitude fait bien sûr mauvaise impression. C'est d'autant plus regrettable quand le candidat, interrogé, énonce immédiatement une bonne stratégie. Dans le même ordre d'idée, il est très décevant

  de voir un candidat obtenir une formule et s'arrêter là, ne pas essayer de la simplifier, ne pas la manipuler, la décrire comme "horrible" et ne rien faire, alors que la solution de l'exercice est sous ses yeux.

- De façon générale, le jury attend des candidats un certain sens de l'initiative. Rester muet parce qu'on n'a pas la solution totale de l'exercice ne mène à rien. Rappelons ici que le niveau des oraux d'ENS étant élevé, les exercices nécessitent en général un raisonnement long et progressif. Le jury en a pleinement conscience, et attend du candidat qu'il lui montre son aptitude à raisonner, même si ce raisonnement est incomplet. L'aptitude à simplifier un problème, par exemple en montrant que le cas général peut se ramener à un sous-cas est perçue très positivement par le jury. De plus, elle permet concrètement de venir à bout de nombreux exercices. Par ailleurs, l'aptitude du candidat à juger qu'une piste est mauvaise et à se relancer sur une autre voie contribue à améliorer la note.

- La prestation d'un candidat est jugée sur toute la durée de l'épreuve.

  Un mauvais début d'oral ne disqualifie pas le candidat, et celui-ci est invité à rester combatif et positif, d'autant plus que ce type d'attitude est nécessaire au métier de chercheur auquel forment les ENS.

  Par ailleurs, la perception qu'a le candidat de sa prestation est souvent fausse, la notation tenant compte de la difficulté des questions, qui est forcément inégale. Cette dernière remarque doit là encore inciter le candidat à rester concentré jusqu'au bout.

- Les théorèmes hors programme, mêmes "classiques" doivent être démontrés s'ils sont utilisés, sauf s'ils sont explicitement admis dans un exercice (exemple: théorème de structure des polynômes symétriques).

2 Exemples spécifiques

- Le jury a noté des difficultés inattendues pour montrer, par exemple, qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ continue sur $\mathbb{R}^2$ qui de manière "visible" tend vers $+\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, atteint un minimum global.

- Le jury a constaté des difficultés dans l'usage des définitions et des propriétés des bornes supérieure et inférieure.

- Le jury a noté un flou au sujet de la description du groupe SO(2) des isométries directes; parfois a obtenu des descriptions contradictoires selon qu'une description matricielle ou géométrique est demandée.

- Un fermé de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement un intervalle, ni une union finie d'intervalles!

- Une fonction polynomiale à plusieurs variables s'annulant une infinité de fois n'est pas nécessairement nulle.

- En dimension infinie, il existe des endomorphismes linéaires injectifs et non surjectifs.

- Le jury a constaté un manque de recul sur le cours sur les équations différentielles linéaires. En particulier l'usage de l'unicité dans le problème de Cauchy est souvent mal perçu par le candidat.

3 Exemples d'exercices et commentaires

Exercice

Soit $T > 0$. On se donne une application $A : [0, T] \to S_n$ (espace des matrices symétriques réelles) de classe C^1 telle que $A(0) = 0$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T], \quad \langle A'(t)u, u\rangle \geq \langle (I + A(t)^2)u, u\rangle.$$

Montrer que $T \leq \pi/2$.

Commentaire.

Cet exercice amène naturellement à une étude du cas de la dimension $n = 1$, qui se résout facilement par un petit calcul. Ensuite se pose la question du passage à la dimension quelconque, à l'aide de la structure des matrices symétriques : on voit qu'on peut presque appliquer le raisonnement de la dimension un à la plus grande des valeurs propres de A. Une difficulté analytique supplémentaire provient de l'éventuelle non-dérivabilité de cette fonction.

Exercice

Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie. On supposera que toute forme linéaire continue sur H est de la forme $v \mapsto \langle v, w\rangle$. Si $u \in H$ on définit $F_u : H \to \mathbb{R}$ par $F_u(v) = \|v - u\| - \|u\|$.

1) (a) On suppose (F_{u_n}) simplement convergente sur H de limite F, avec $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = +\infty$. Montrer que F est linéaire continue. (b) Quelles sont les formes linéaires continues ainsi obtenues?

2) On suppose (F_{u_n}) simplement convergente. Montrer que $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit bornée, soit tend vers $+\infty$.

3) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 1$, et qu'il existe $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, on a $\lim_{n\to+\infty}\langle u_n, v\rangle = \langle u, v\rangle$. Montrer que (F_{u_n}) converge simplement et décrire sa limite.

Commentaire. (1a) s'obtient en partant directement de la définition, en écrivant la norme comme racine carrée du produit scalaire et par un développement limité à l'ordre 1 de la racine carrée. (1b) le calcul initial montre que la forme linéaire obtenue est de norme au plus un, mais l'intuition laisse espérer que la norme est exactement 1, or l'intuition est trompeuse, et peut être rectifiée par de bon choix de suites (u_n), en utilisant que la dimension est infinie: on peut en effet obtenir toutes les formes linéaires de norme au plus un. Ce phénomène de dimension infinie apparaît à nouveau dans (3), où, contrairement à l'intuition, l'inégalité $\|u\| \leq 1$ peut être stricte. Note: bien que l'hypothèse soit équivalente à la complétude de l'espace (espace de Hilbert), la définition de la complétude, hors-programme, n'apparaît pas dans la résolution.

Exercice

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et n un entier. On note

$$E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid \|f - P\|_\infty = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty\}.$$

1) Montrer que E_n est non vide.

2) Montrer que E_n est convexe.

3) Montrer que E_n est un singleton. On commencera par montrer que pour tout $P \in E_n$ la fonction $|f - P_n|$ prend la valeur $\|f - P\|_\infty$ en au moins $n + 2$ points.

Commentaire. La question (1) est une conséquence directe de la distance à une partie fermée bornée dans un espace de dimension finie.

La question (2) est une conséquence directe de la définition de la convexité. L'indication de la question (3) se prouve en raisonnant par l'absurde en construisant via interpolation de Lagrange un contre-exemple de la forme $(1-t)P+tQ$. L'unicité, quant à elle, découle alors de la convexité.

Exercice

Soit $P = P(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme en n variables. On dit que P est harmonique si

$$\Delta P := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 P = 0.$$

On admet qu'un polynôme harmonique nul sur la sphère unité $\mathcal{C}$ est nul.

1. Montrer que pour tout polynôme P, il existe un unique polynôme harmonique Q tel que
$$\deg(Q) \leq \deg(P) \quad \text{et} \quad Q|_{\mathcal{C}} = P|_{\mathcal{C}}.$$
2. Soit P un polynôme homogène de degré p. Montrer que P admet une unique décomposition
$$P(x) = |x|^2 \tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$
avec $\tilde{Q}$ harmonique et homogène de degré p, $\tilde{P}$ homogène de degré $p-2$.

Commentaire. Question 1) : chercher Q sous la forme $(1-|x|^2)P_1 + P$.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $U_n(x) = (x^2-1)^n$, $P_n = (U_n)^{(n)}$.
Soit D l'application linéaire qui va de $C^2([-1,1], \mathbb{C})$ dans $C^0([-1,1], \mathbb{C})$, définie par :
$D(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)$.

1. Montrer que $(X^2-1)U_n' = 2nXU_n$.
2. Montrer que pour tous $f, g \in C^2([-1,1], \mathbb{C})$,
$$\int_{-1}^{1} D(f)(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)D(g)(t)dt$$
3. On note $\Sigma(D) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists f \neq 0, \ D(f) = \lambda f\}$.
Montrer : $\Sigma(D) = \{\ -n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$.

Commentaire. Question 3) : En dérivant l'identité de la question 1) $(n+1)$ fois, montrer que $P_n = U_n^{(n)}$ est vecteur propre de D, associé à la valeur propre
$-n(n+1)$. Pour l'inclusion inverse, montrer que tout vecteur propre f de D associé à une valeur propre λ vérifie $(\lambda + n(n+1)) \int fP_n = 0$ pour tout n.