# Rapport du jury de l'épreuve orale de mathématiques Filière PC Concours 2015

Mikael De La Salle, Louis Dupaigne, Emmanuel Grenier, Alexis Tchoudjem

## 1 Commentaires généraux

L'épreuve orale de mathématiques s'est déroulée dans les locaux de l'ENS de Lyon, en parallèle avec les travaux pratiques de chimie. Il s'agit d'une épreuve de 45 minutes, sans préparation. Il y a eu 232 candidats présents.
Le niveau des candidat-e-s est globalement satisfaisant. Nous notons que les évolutions du programme cette année ont induit des différences dans les connaissances mobilisées par les candidat-e-s en 3/2 et 5/2 pour la résolution des exercices proposés, bien que les énoncés aient été choisis pour limiter cette disparité prévisible.
Parmi les lacunes rencontrées, mentionnons une connaissance trop floue des notions (par exemple, confusion entre convergence uniforme et convergence en norme $N_2$, énoncé de la loi des grands nombres mal connu), des réflexes calculatoires absents (inégalité de Cauchy-Schwarz), une incapacité à sortir du calcul brut (en algèbre linéaire) ou encore la difficulté à formaliser un problème (en probabilités mais aussi dès que le problème comporte des paramètres non explicités), le manque d'initiative et l'attentisme.
Les meilleur-e-s candidat-e-s se sont distingué-e-s d'une ou plusieurs des façons suivantes: capacité à mener des calculs proprement, notamment en sachant optimiser par rapport aux paramètres d'un problème, intuition et recul, notamment trouver des contre-exemples, connaissances étendues leur permettant, par analogie, de proposer rapidement une stratégie de preuve.
Sur les questions de forme, une grande partie des candidats a bien appris à utiliser son temps, le tableau et les interactions avec l'examinateur. Nous rappelons aux autres de bien écouter l'énoncé de la question posée avant de commencer à y répondre: celui-ci a peu de chance de correspondre à un exercice-type que le candidat pense connaître, même s'il est pertinent de faire des liens lorsqu'ils existent. Il vaut mieux ne pas se retourner constamment vers l'examinateur pour faire valider ses calculs ou à l'inverse ne jamais

le faire. Comme l'an passé, la rédaction et la formalisation restent des obstacles pour nombre de candidats: certains ne savent pas introduire de notations pertinentes quand d'autres sont trop contraints par la rigueur qu'ils s'imposent : ils n'arrivent pas à prendre le recul nécessaire pour aboutir sur les questions délicates.

## 2 Quelques exercices posés

### Exercice 1

1. Donner une suite $(a_n)$ à termes positifs telle que la série $\sum a_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha \geq 1$.

2. Donner une fonction $f$ positive et telle que
$$\int_0^{+\infty} f(t)^\alpha dt \quad \text{converge si et seulement si } \alpha = 1.$$
*Indication: on pourra chercher $f$ telle que $f(t) = a_n$ si $t \in [n, n + t_n]$ et $f(t) = b_n$ si $t \in ]n + t_n, n + 1]$ pour des $t_n \in [0, 1]$ et $b_n$ bien choisis.*

### Exercice 2

1. Si $A$ est une matrice symétrique $n \times n$, on note
$$l_1(A) \geq ... \geq l_n(A)$$
ses valeurs propres. Montrer que $l_i(A) = \sup_{V \leq \mathbb{R}^n \,:\, \dim V = i} \inf_{v \in V \,:\, ||v||=1} v^* Av$.

2. En déduire $l_{i+j-1}(A + B) \leq l_i(A) + l_j(B)$ si $A, B$ sont deux matrices symétriques $n \times n$.

### Exercice 3

Sur l'espace $E := \mathbb{R}[X]$, on considère le produit scalaire :
$$(P, Q) := \int_{-1}^{1} PQ \, dx.$$

1. Justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

2. Pour ce produit scalaire déterminer l'adjoint de l'endomorphisme
$$\varphi : P \mapsto \frac{d}{dx}\left((1 - x^2)\frac{d}{dx}(P)\right) .$$

3. Montrer que si $n \geq 1$, $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$ est un vecteur propre de $\varphi$. *Indication :* si on pose $f_n := (x^2-1)^n$, alors $(1-x^2)f_n' + 2nxf_n = 0$ et $(1-x^2)f_n" + 2(n-1)xf_n' + 2nf_n = 0$, dériver $n$ fois ...

4. En déduire que les polynômes $P_n$ sont deux à deux orthogonaux.

5. Soit $P$ de degré $\leq n$ tel que $\int_{-1}^{1} Px^k dx = 0$ si $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que $P = P(1)P_n$.