

COMPOSITION DE PHYSIQUE – B – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

★ ★ ★

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
On se contentera, pour les applications numériques, d'un seul chiffre significatif.
Les deux problèmes sont indépendants.

I. Trajectoire d'un volant de badminton

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjugué de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.

On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air.

I.1 On lance depuis le sol le volant de masse m avec une vitesse initiale U_0 , dans une direction faisant un angle θ_0 avec le plan du sol, supposé horizontal. Quelle est la nature de la trajectoire ? Dessiner son allure. Déterminer la portée L_0 (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de U_0 , de θ_0 , et de l'accélération de la pesanteur g .

I.2 Validez dimensionnellement l'expression de L_0 obtenue et vérifiez-la sur des cas limites simples que vous choisirez.

I.3 La vitesse initiale étant fixée, quel angle θ_0 permet d'envoyer le volant le plus loin possible ?

On tient maintenant compte du freinage de l'air, modélisé en assimilant le volant à une sphère solide en mouvement dans un fluide newtonien. On écrit la force de freinage sous la forme $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x U \vec{U}$, où $\vec{U}$ est la vitesse du volant et U sa norme, ρ la masse volumique de l'air, S la surface de référence du volant, et C_x le coefficient de traînée.

I.4 Déterminer la dimension de C_x . Tracer l'allure de sa variation en fonction du nombre de Reynolds, et indiquer les régimes où l'écoulement est laminaire ou turbulent.

I.5 La viscosité cinématique de l'air est $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et la taille caractéristique d'un volant de badminton est $L \simeq 6 \times 10^{-2} \text{ m}$. Des valeurs de la vitesse sont indiquées sur la chronophotographie de la figure 1. Estimer les valeurs correspondantes du nombre de Reynolds. À quel régime d'écoulement correspond-il ?

I.6 Écrire l'équation du mouvement du volant. Montrer qu'elle admet une solution particulière, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la vitesse, notée U_∞ , en fonction des paramètres du problème.

I.7 Récrire l'équation du mouvement en faisant notamment apparaître le rapport $\vec{U}/U_\infty$.

I.8 À quelle condition sur U peut-on négliger la pesanteur ? On suppose dans toute la suite du problème que cette condition est initialement vérifiée. Dans ce cas, quelle est la nature de la trajectoire ? Intégrer l'équation du mouvement pour obtenir U en fonction du temps.

I.9 En utilisant cette expression, déterminer et calculer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale. Repérer le point correspondant sur la chronophotographie de la figure 1. Vérifier, par une mesure que l'on expliquera, que la vitesse en ce point est bien approximativement la moitié de la vitesse initiale.

I.10 Toujours dans le cadre de l'approximation de la question I.8, déterminer l'expression donnant la distance horizontale $x(t)$ parcourue au temps t .

I.11 Obtenir x en fonction de U .

I.12 On suppose que l'approximation de la question I.8 cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids. Quelle est l'expression de U à cet instant ? En déduire la distance horizontale parcourue L .

On modélise la trajectoire du point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à $t = 0$. volant en distinguant trois régimes successifs : (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ; (2) un régime intermédiaire ; (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.

I.13 Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini, en justifiant précisément votre réponse.

I.14 Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire. Dessiner la trajectoire obtenue dans cette approximation.

I.15 Donner l'expression littérale de la portée du tir dans cette approximation. Comment se compare-t-elle à la portée en l'absence de freinage, déterminée à la question I.1 ?

I.16 Estimer numériquement la portée du tir. On donne $\ln 8 \simeq 2$, $\cos \theta_0 \simeq 0,6$, $\sin \theta_0 \simeq 0,8$. Comparer le résultat avec la valeur indiquée sur la chronophotographie.

I.17 Durant le régime intermédiaire, tous les termes de l'équation du mouvement sont du même

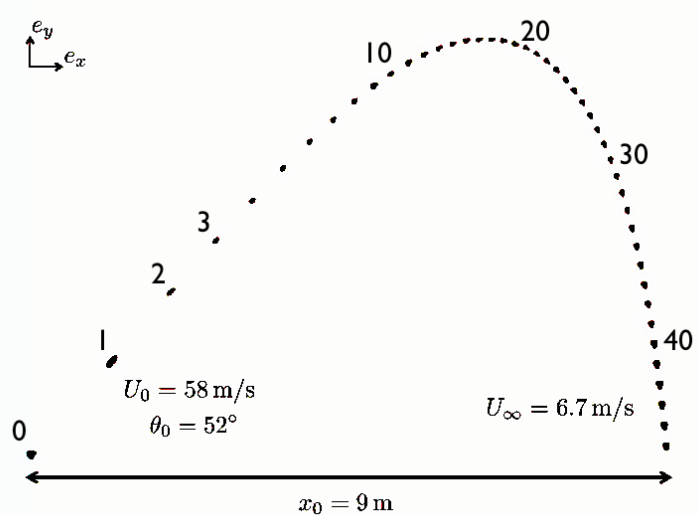


Figure 1: Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à $t = 0$.

ordre de grandeur. En déduire, par un argument dimensionnel, une expression littérale de l'ordre de grandeur de la distance parcourue lors du régime intermédiaire. Dans quelle limite l'approximation faite à la question I.14 est-elle justifiée ?

I.18 Comment faudrait-il modifier les paramètres de l'expérience pour que la trajectoire corresponde plus précisément à celle obtenue à la question I.14 ? On discutera suivant la vitesse initiale et la nature du projectile. La convergence vers cette solution limite est-elle plutôt rapide, ou lente ?

I.19 Donner les expressions littérales des temps de montée et de descente du volant. Estimer, par un argument dimensionnel, l'ordre de grandeur littéral de la durée du régime intermédiaire. Comparer les durées de ces trois régimes dans la limite où l'approximation de la question I.14 s'applique.

II. Mesure de la masse du photon

La théorie actuelle de l'électromagnétisme est constituée par les équations de Maxwell, qui sont compatibles avec toutes les expériences réalisées. On ne peut néanmoins exclure la possibilité que des expériences plus précises mettent un jour cette théorie en défaut, auquel cas il faudrait la modifier. Le but de ce problème est de proposer une modification des équations de Maxwell, et de confronter cette nouvelle théorie à deux expériences.

A. Modification des équations de Maxwell

II.1 On suppose que le champ électrique dans le vide satisfait à l'équation

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu^2 \vec{E}, \quad (1)$$

où $\mu > 0$. Etablir la relation de dispersion correspondant à cette équation. Dans quelle limite retrouve-t-on la relation de dispersion usuelle des équations de Maxwell ?

II.2 Exprimer la vitesse de groupe v_g en fonction de k , μ et c . On suppose que μ est petit par rapport à une quantité que l'on précisera. Exprimer alors la différence $c - v_g$ au moyen d'un développement limité, à l'ordre dominant en μ .

II.3 Soit un champ $\vec{E}$ uniforme. Montrer qu'il oscille alors à une pulsation dont on donnera l'expression. Déduire de la relation de Planck-Einstein l'énergie $\mathcal{E}$ d'un photon correspondant à cette pulsation. Par ailleurs, la relation d'Einstein $\mathcal{E} = mc^2$ permet d'associer au photon une masse m dont on donnera l'expression.

B. Mesure astrophysique

Un pulsar est un astre tournant très rapidement sur lui-même (avec une période souvent inférieure à la seconde) et émettant un fort rayonnement électromagnétique dans un cône étroit centré autour de son axe magnétique, qui est distinct de son axe de rotation. On observe ainsi sur Terre un signal lumineux sous forme d'impulsions périodiques en provenance de cet astre, d'où le nom de "pulsar".

II.4 On enregistre ce signal séparément dans deux domaines de longueur d'onde différents, en fonction du temps. Expliquer sans calcul comment se traduirait, sur ces mesures, une petite dispersion de la lumière en fonction de la longueur d'onde.

II.5 On note δt la résolution temporelle de l'appareil enregistreur, et Δv la valeur absolue de la variation de la vitesse de groupe due à la dispersion. Exprimer l'incertitude sur la mesure de la dispersion relative, $\Delta v/c$, en fonction de δt et de la distance L du pulsar.

II.6 Des observations des lumières bleue et rouge en provenance du pulsar de la nébuleuse du Crabe n'ont pas permis de déceler de dispersion. Calculer numériquement la borne supérieure sur $\Delta v/c$.

Données numériques : $L = 6 \times 10^{19}$ m, $\delta t = 2 \times 10^{-5}$ s.

II.7 En déduire un ordre de grandeur de la borne supérieure sur μ , puis sur la masse du photon. On donne la constante de Planck réduite $\hbar \simeq 10^{-34}$ J · s.

II.8 Quel est l'intérêt, pour cette analyse, d'avoir recours à des objets astrophysiques ? Quel domaine de longueur d'onde faudrait-il observer pour améliorer la borne supérieure obtenue ?

C. Une expérience d'électrostatique

II.9 On se place, dans toute cette partie, dans le cadre de l'électrostatique. On admet que l'équation de Maxwell-Gauss est modifiée comme suit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \mu^2 V, \quad (2)$$

où V désigne le potentiel électrostatique. Vérifier que cette équation est compatible avec l'équation (1) dans des conditions que l'on précisera.

II.10 Une sphère métallique creuse parfaitement conductrice, de rayon R , est mise à un potentiel constant V_0 . On suppose l'intérieur de la sphère vide de charges. On suppose tout d'abord $\mu = 0$. Déterminer le champ $\vec{E}$ puis le potentiel V à l'intérieur de la sphère.

II.11 On cherche à déterminer comment une valeur non nulle de μ modifie le champ $\vec{E}$ et le potentiel V . Justifier que l'on puisse faire à l'intérieur de la sphère, si μ est suffisamment petit, l'approximation $V \simeq V_0$ dans le membre de droite de l'équation (2). En déduire le champ $\vec{E}$ puis le potentiel V à l'intérieur de la sphère.

II.12 Préciser le domaine de validité de l'approximation faite à la question précédente, sous forme d'une condition sur μ .

II.13 On essaie de déceler une valeur non nulle de μ en mesurant précisément la différence de potentiel entre deux points à l'intérieur de la sphère. Pensez-vous possible, grâce à une telle expérience, de réduire la borne supérieure obtenue à la question II.7 ?

* *
*