Rapport sur l'épreuve de Mathématiques D, ENS filière MP (2016)

Julien Marché (concepteur), Julien Bureaux, Jérémy Daniel,
Diego Izquierdo, Jean-Pierre Marco (correcteurs)

L'épreuve de 6 heures de mathématiques de la session 2016 concernait l'étude des spectres des graphes finis. La première partie établissait des estimations générales des valeurs propres s'appuyant entre autres sur la méthode du minimax. La deuxième partie étudiait le cas du Buckminsterfullerène, c'est-à-dire le graphe de Cayley du groupe A_5. L'étude du spectre se ramenait essentiellement à l'étude des représentations de A_5. La troisième partie introduisait la constante de Cheeger - ou constante isopérimétrique - et la reliait au diamètre et à la deuxième valeur propre du graphe. En complément, on s'intéressait au cas où le graphe pouvait être dessiné sur une sphère. Les raisonnements étaient pour la plupart géométriques. Finalement, la quatrième partie avait pour but de construire une famille de graphes dont la deuxième valeur propre est uniformément minorée. Ces graphes, découverts par Gabber et Galil en 1980 sont les premiers exemples élémentaires de graphes expanseurs. Après des préliminaires sur la transformation de Fourier discrète, cette partie s'appuyait sur des majorations simples et des arguments combinatoires. La plupart des résultats traités dans le sujet sont tirés du livre d'Yves Colin de Verdière sur les spectres de graphes.

Le sujet était bien sûr très long et n'a été traité entièrement par aucun candidat. Les quatre parties étaient indépendantes et dans l'ordre de difficulté pouvaient être ordonnées en I, IV, II, III. Ci-dessous, on donne la notation de l'épreuve et quelques commentaires généraux, puis on détaille le traitement de chaque partie par les candidats.

Statistiques.

La répartition des notes à l'épreuve de Maths D est la suivante :

$0 \leq N < 4$	407	39,13 %
$4 \leq N < 8$	367	35,29 %
$8 \leq N < 12$	164	15,77 %
$12 \leq N < 16$	82	7,88 %
$16 \leq N \leq 20$	20	1,92 %
Total	1040	100 %

Moyenne	5,83
Note minimale	0
Note maximale	20

À propos du barème.

L'épreuve à été corrigée en attribuant très peu de points aux questions faciles et beaucoup de points aux questions difficiles et/ou longues. Le grappillage de points a donc été très sévèrement puni. À titre indicatif, sur 20 :

- les questions I.2.a et I.3.b rapportaient 0,29 points.
- les questions I.5.b et IV.1.a rapportaient 0,57 points.
- les questions I.2.c et III.3.a rapportaient 1,14 points.
- les question I.4.b et II.1.c rapportaient 1,71 points.
- la question III.1.b rapportait 2,28 points.
- la question II.2.c rapportait 2,86 points.
- la question III.3.b rapportait 3,43 points.

Remarques générales.

- les élèves sont très mal à l'aise avec les groupes, et en particulier ont du mal manipuler des groupes non abéliens : en II.1, beaucoup d'élèves composent dans le mauvais sens ; en II.2.c, pour un grand nombre d'élèves, le groupe orthogonal est commutatif.
- les élèves confondent les différentes manières de noter les permutations.
- certaines confusions graves d'algèbre commutative : définition d'un endomorphisme symétrique ; si $(e_1, ..., e_n)$ est une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V et W en est un sous-espace, W ne possède pas forcément une base extraite de $(e_1, ..., e_n)$; si $v_1, ..., v_n$ sont des vecteurs propres d'un endomorphisme ϕ d'un espace vectoriel de dimension n et les valeurs propres correspondantes sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$, il ne faut pas oublier de vérifier que $v_1, ..., v_n$ forment une base avant de conclure que les valeurs propres de ϕ sont bien $\lambda_1, ..., \lambda_n$; beaucoup de candidats ne savent pas que l'adjoint est représenté par la matrice transposée.
- un nombre trop important d'élèves écrit des non sens : par exemple, en II.2.b, beaucoup de candidats appliquent T_G ou L_g à un nombre réel.
- on retrouve souvent des phrases qui mettent en évidence une mauvaise compréhension des notions apprises en classe préparatoire. Par exemple :
  - « ϕ est une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même **cardinal**, donc un isomorphisme ».
  - « si $g \in \mathcal{A}_5$, alors $\mathcal{A}_5 \to \mathcal{A}_5, h \mapsto g^{-1}h$ est un **isomorphisme de groupes** ».
- la qualité de la rédaction est souvent très mauvaise. En particulier, un nombre important de candidats ne sait pas quantifier correctement. S'il le considère utile, à partir de la prochaine session, le jury pourra décider d'attribuer des points supplémentaires aux copies correctement rédigées et correctement quantifiées.
- beaucoup de candidats essayent de résoudre certaines questions en utilisant des questions antérieures mais oublient de vérifier les hypothèses : par exemple, pour III.3.c, beaucoup de candidats utilisent III.3.b en ignorant l'hypothèse sur f.
- le jury déplore qu'un nombre trop important de candidats fait preuve de peu d'honnêteté intellectuelle et cherche à faire croire au correcteur qu'une question a été résolue en cachant le point faible du raisonnement dans de longues explications.

Coquilles.

Une coquille s'était glissée dans la définition de T_G : il fallait lire « pour tout $x \in V$ » et non « pour tout $x \in E$ ». De même, avant la question II.2, il fallait lire « $(g,h) \in \mathcal{A}_5^2$ » au lieu de « $(g,h) \in \mathcal{A}_5$ » .

Partie I.

C'est la partie la plus facile et la mieux traitée par les candidats.

1. La question est en général à peu près correctement traitée, mais les explications et la rédaction sont souvent trop floues. On rappelle aux candidats qu'ils doivent particulièrement soigner leur rédaction en début de sujet. Par exemple, ici, il fallait indiquer précisément l'endroit où l'on utilisait l'équivalence :

$$\forall (x,y) \in V^2, (x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E$$

ainsi qu'écrire clairement les changements de variables réalisés. Quelques candidats croient montrer qu'un endomorphisme est symétrique en prouvant $\langle T_G f, f\rangle = \langle f, T_G f\rangle$. Quelques rares candidats écrivent des non sens en appliquant par exemple l'endomorphisme T_G à un nombre réel.

2.a Question très facile et très bien traitée en général. Insistons encore une fois qu'en début de sujet la rédaction doit être très soignée : on attendait en particulier que les candidats indiquent l'endroit où ils utilisaient l'orthonormalité de la base $(e_1, ..., e_n)$. Certains candidats se trompent et écrivent $||f|| = f_1^2 + ... + f_n^2$.

2.b Question facile et assez bien traitée. On attendait toujours une rédaction soigneuse : il fallait donc éviter dans la deuxième partie de la question de diviser par 0.

2.c La plupart des candidats montrent correctement que

$$\lambda_k \geq \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \sup_{f \in W \cap S} q_G(f).$$

Par contre, assez peu de candidats établissent correctement l'autre inégalité. Beaucoup de candidats se trompent et affirment que tout sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^V$ admet une base formée de k vecteurs parmi $e_1, ..., e_n$: cela met en évidence un manque de compréhension de l'algèbre linéaire élémentaire. Par contre, le jury a été agréablement surpris par le faible nombre d'erreurs liées à la manipulation des bornes inférieures et supérieures.

3.a Cette question a été moyennement traitée. Un nombre assez important de candidats oublie d'invoquer la connexité du graphe pour conclure. On s'attendait toujours à une rédaction assez précise : il fallait au moins expliquer brièvement comment la connexité intervenait et ne pas oublier de mentionner que les fonctions constantes étaient bien dans le noyau de T_G. Certaines copies cherchent à faire une récurrence sur le nombre de sommets du graphe : ça n'a été fait correctement que très rarement, puisqu'il était difficile de gérer par cette méthode l'hypothèse de connexité du graphe.

3.b Question très facile et souvent bien traitée. Certaines copies utilisaient les questions 2.b ou 2.c, ce qui compliquait inutilement la résolution de la question.

4.a Question très facile et très bien traitée. Il fallait juste faire attention à indiquer que $|f(x)| > 0$ pour ne pas diviser par 0.

4.b Question relativement bien traitée. Les candidats qui ne l'ont pas résolu n'ont tout simplement pas réussi à exhiber un vecteur propre associé à la valeur propre $2d_G$.

4.c Première question plutôt difficile du sujet. Si beaucoup de candidats ont sauté la question, la plupart des bons candidats ont réussi à la résoudre. L'erreur la plus courante a été d'utiliser les cas d'égalité dans les inégalités de la question 4.a sans se rappeler que ces dernières n'étaient valables que si l'on se plaçait sur un sommet $x \in V$ tel que $|f(x)|$ est maximal.

5.a Question assez facile et moyennement traitée. Un nombre important de candidats utilise à tort la question 2.b (au lieu de la question 2.c), sans remarquer que l'espace F_k dépend de l'ensemble des arêtes E.

5.b La première partie de la question a été moyennement traitée. Les candidats qui l'ont traitée ont procédé par des méthodes assez variées, ce qui a fait plaisir au jury. La deuxième partie de la question a été en général correctement traitée.

Partie II.

Dans cette partie de niveau plus élevé, les candidats ont été amenés à manipuler des groupes classiques de permutations et d'isométries en lien avec l'algèbre linéaire. La plupart des copies abordent cette partie, mais beaucoup passent directement à la partie III après la question 2.b. Plus difficiles, les questions à partir de 2.c étaient largement valorisées par le barème.

1.a Cette question très facile a été généralement bien traitée. Elle a cependant posé des difficultés aux (trop nombreux) candidats qui ne maîtrisent pas la notation cyclique des permutations.

1.b Beaucoup de confusions sur l'ordre de composition des permutations ! Rappelons aussi que $\mathcal{A}_3$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathcal{A}_4$: on attendait que la restriction soit explicitée. Enfin, certains candidats associent à tout $\sigma \in \mathcal{A}_4$ un $\tilde{\sigma}$ tel que $\tilde{\sigma}(4) = 4$, mais oublient ensuite de revenir à σ.

1.c Cette question plus calculatoire a été rarement abordée et rarement réussie. L'essentiel consistait à engendrer le cycle $(1\,2\,3)$ avec a et b. Peu de copies y parviennent sans fautes.

2.a La plupart des candidats omettent d'établir le caractère non orienté du graphe, ce qui empêche de déduire la connexité à partir de l'existence d'un chemin de l'identité à tout élément. Par ailleurs, il ne suffisait pas de rappeler que $\mathcal{A}_5$ est engendré par a et b en tant que groupe pour justifier que tout élément est produit de facteurs a ou b : par exemple, $\mathbb{Z}$ est engendré par 1 en tant que groupe additif. La pire erreur était de considérer que $\mathcal{A}_5$ est abélien.

2.b Bien que facile, cette question a été assez mal réussie. La définition d'une isométrie n'est pas toujours connue. Les manipulations de fonctions, en particulier les compositions, ont donné lieu à de très nombreuses erreurs de syntaxe particulièrement inquiétantes à ce niveau.

2.c Cette question difficile n'est abordée de manière substantielle que par les meilleures copies, mais même parmi celles-ci, beaucoup confondent les groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Une autre erreur récurrente consistait à affirmer que tout morphisme d'un groupe non abélien vers un groupe abélien est trivial. D'excellents candidats ont cependant traité la question parfaitement.

3.a Personne n'a réussi cette question qui était certainement l'une des plus délicates du sujet. Aucun point n'a été attribué aux copies qui montraient seulement la stabilité de F.

3.b Cette question assez ardue n'a été abordée avec succès que par une poignée de très bons candidats. La difficulté principale consistait à gérer correctement la restriction au sous-espace F. Rares sont ceux qui ont pensé à utiliser la question 3.a.

3.c Il semblait nécessaire d'avoir bien compris la question précédente pour réussir celle-ci.

Partie III.

Cette partie, la plus « géométrique », a été assez largement abordée et souvent de manière linéaire, sans grappillage abusif. Le niveau des questions est très variable, du plus simple pour les premières au plus difficile pour les questions 3.b, 4.b et 4.c. La question 3.b n'a jamais été correctement traitée, les questions 4.b et 4.c ont reçu des réponses partielles, pour lesquelles l'intuition géométrique a été valorisée.

0. Question préliminaire purement formelle. Il est surprenant de constater qu'elle a posé des difficultés à un grand nombre de candidats, qui préfèrent de vagues explications au recours à la définition précise de d et au raisonnement par double inégalité (pour la symétrie). Son faible coefficient n'a pas entraîné d'excessive pénalité dans ce cas, mais on ne peut que souligner la nécessité d'améliorer l'approche de ce type de raisonnement purement systématique (à l'image de la question **II.2.b**).

1.a L'identification de $B(A,0)$ à A est immédiate. La preuve de l'inégalité demandait un peu de soin, pour expliciter la relation entre le bord ∂A et le complémentaire $B(A,1) \setminus A$. Peu de copies y parviennent parfaitement, mais une majorité donne des arguments assez convaincants pour être pris en compte. Certaines copies n'hésitent cependant pas à utiliser des justifications manifestement frauduleuses, et sont de ce fait sévèrement sanctionnées.

1.b Question plus difficile et moins fréquemment abordée, mais en général assez réussie. L'itération de l'inégalité obtenue dans la question précédente (sous contrainte de majoration du cardinal par $|V|/2$) a été bien vue en général. Il s'agissait ensuite d'exploiter le résultat en l'appliquant à des boules de cardinal suffisant pour qu'elles admettent une intersection non vide, en tenant compte des problèmes liés à la division par 2 du cardinal de V. Ce dernier point mis à part, les solutions proposées étaient en général satisfaisantes.

2.a Question souvent abordée et en général assez bien traitée. L'orthogonalité de f au noyau de T_G est immédiate à partir de **I.3.a**. L'expression de $q_G(f)$ est un simple calcul, la forme de f entraîne une décomposition de $q_G(f)$ en deux sommes à supports disjoints. L'identification des termes de bord dans ces deux sommes a souvent été traitée un peu légèrement.

2.b Question facile, conséquence immédiate de la question précédente et de **I.2.b**, à condition d'utiliser correctement la définition de h_G comme borne inférieure. La question a été bien traitée en général, mais ce dernier point a été la cause de quelques erreurs.

3.a Comme **1.b**, cette question est moins souvent abordée mais l'est en général avec succès. Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz permet de faire apparaître le terme $q_G(f)$, le terme complémentaire se traite alors soit directement, soit par une deuxième application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

3.b Question très délicate, malgré l'indication. Elle n'a jamais été convenablement traitée.

3.c Question assez simple à condition de penser à introduire la *partie positive* d'une fonction propre ayant suffisamment d'images positives. Bien que techniquement plus accessible que la précédente, elle n'a jamais été abordée avec assez de pertinence pour mériter une notation.

4.a Question rarement abordée, bien qu'elle se déduise facilement de la partie **I** après choix d'une base orthonormée de $\mathcal{E}$. Les solutions proposées ont souvent été assez approximatives.

4.b Question très rarement abordée. L'interprétation géométrique de la condition 3. semble avoir été la source principale de difficulté. Plusieurs copies ont l'intuition correcte conduisant à réaliser les points de V comme sommets d'un tétraèdre régulier, mais ne parviennent pas à déterminer les coordonnées de ces sommets. La vérification de la condition 3. est alors impossible, mais là encore certaines copies ont proposé un raisonnement intuitif (par symétrie et « valeurs intermédiaires » par exemple) qui méritait d'être pris en compte.

4.c Comme la précédente, question très rarement abordée car elle nécessite une bonne visualisation géométrique de la question **4.a**. Quelques germes de solutions essentiellement intuitifs ont été valorisés.

Partie IV.

Dernière partie du sujet, elle est sans surprise la moins traitée. Demandant une certaine aisance technique, elle ne présente toutefois pas de question insurmontable (exceptée **2.d**). Le grappillage dans cette partie n'a été que très rarement récompensé et on ne saurait trop conseiller aux candidats d'aborder un sujet de concours de façon linéaire, la longue durée de l'épreuve autorisant une véritable immersion dans le sujet.

1.a La question demande un calcul en *transformée de Fourier discrète*. Il était important de bien comprendre les notations pour se ramener proprement au fait que les sommes des n premières puissances d'une racine n-ème de l'unité, non égale à 1, vaut 0.

1.b Un changement de variable. Un argument convaincant expliquant pourquoi la transformation était bijective était attendu. Beaucoup de candidats ne font pas le lien entre l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien et la transposée de sa matrice écrite dans une base orthonormée.

1.c Question plus difficile. Un candidat justifiant uniquement la connexité et la régularité du graphe n'était par récompensé. Les fonctions χ_y sont des vecteurs propres de l'endomorphisme défini sur $\mathcal{H}_n$ par la même formule que T_G ; un argument expliquant ce passage du réel au complexe était attendu. Par ailleurs, pour conclure que toutes les valeurs propres sont ainsi trouvées, il faut encore montrer que les χ_y forment une base de $\mathcal{H}_n$, par exemple en utilisant **1.a**.

2.a La question ne pose aucune difficulté.

2.b Question délicate rarement bien traitée. On peut suivre l'indication de l'énoncé et remarquer que si f est vecteur propre de T, alors $\hat{f}$ est vecteur propre de $\hat{T}$, pour la même valeur propre. Il s'agit alors essentiellement de comprendre la relation entre $\hat{T}$ et U.

2.c Une fois posé $G = |F|$, les calculs sont élémentaires.

2.d Cette question n'a été correctement traitée par aucun candidat. Elle ne présente pas de difficulté conceptuelle mais nécessite de nombreuses disjonctions de cas pour conclure correctement. Une réponse couvrant une partie des cas aurait été valorisée.

2.e Les inégalités ne posent pas de grosse difficulté. Il faut cependant faire attention dans l'utilisation de **2.d** où x est supposé dans D_n $\{(0,0\}$: deux cas sont donc à traiter.

2.f Comme $\gamma(x,y) = \gamma(y,x)^{-1}$, il s'agissait d'appliquer l'inégalité arithmético-géométrique généralisée :

$$2ab = 2(\lambda^{1/2}a)(\lambda^{-1/2}b) \leq \lambda a^2 + \lambda^{-1}b^2,$$

avec, a, b, λ des réels strictement positifs.