Rapport du jury, Épreuve Oral Maths Ulm

Nicolas Curien

1. Déroulement de l'épreuve

Un des buts de l'oral MPI Ulm est d'évaluer, outre les connaissances et la maîtrise technique des candidats, leur capacité à comprendre, à interpréter et à réagir dans des situations mathématiques nouvelles. L'oral s'écarte ainsi parfois du format traditionnel, et prend généralement la forme d'un dialogue entre l'examinateur et le candidat. Le candidat est informé dès le début de l'épreuve que l'exercice de mathématique n'est qu'un prétexte à la discussion et que c'est uniquement celle-ci qui est jugée. Il n'est donc pas obligatoire de résoudre en entier l'exercice et certaines questions sont posées sous forme ouverte afin de tester les réactions du candidat.

Lors de cette session 2016, les candidats étaient confrontés à un problème mathématique, d'énoncé généralement court, et dont la solution nécessite un cheminement généralement complexe. Après quelques minutes de réflexion, l'examinateur questionne le candidat sur les approches possibles, les cas particuliers traitables, les exemples instructifs etc. S'en suit un dialogue où l'examinateur, tantôt questionne le candidat ou propose des pistes de réflexions. L'exercice "principal" était généralement interrompu quelques minutes avant la fin de l'oral pour poser des questions de cours ou alors de petits exercices sur d'autres parties du programme.

2. Commentaires généraux

Niveau général: Le niveau mathématique des candidats interrogés lors de cette épreuve reste très élevé, la sélection à l'écrit a visiblement été efficace. Cela permet de poser des exercices au contenu mathématique ambitieux lors de cet oral. Nous tenons à remercier tous les candidats qui nous ont donné l'occasion d'avoir un échange d'un réel intérêt scientifique.

Sur le cours: Les réflexes de taupe et les exercices classiques font partie du bagage d'une grande majorité des candidats. En revanche, le jury a été déçu par la méconnaissance (ou connaissance superficielle) du cours de MPSI et MP. En effet bien que tous les candidats connaissent les énoncés des théorèmes au programme, leurs démonstrations sont floues, imprécises ou oubliées. Même si la manipulation des objets au programme est généralement bonne, leur définition précise est quelques fois oubliée.

Le jury constate que la connaissance précise des objets et résultats au programme est souvent négligée au profit de compléments hors-programme classiques.

Voici quelques exemples :

- Modélisation de variables aléatoires. Le jury a été consterné de voir que la construction d'un espace probabilisé supportant 2 variables aléatoires indépendantes de loi donnée sur $\mathbb{Z}$ était d'une difficulté insurmontable pour une grande majorité des candidats. Bien que la manipulation des variables aléatoires s'avère bonne chez les candidats, leur définition ou "typage" mathématique est souvent très approximative.

- Les preuves des théorèmes et définitions importantes de première année (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle, définition et premières propriétés du déterminant, définition de la dimension d'un espace vectoriel) sont souvent oubliées. Quel dommage !

- Si $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité et $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$ est une suite croissante d'événements alors $\mathbb{P}(\bigcup_{i\geq 0} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Beaucoup de candidats essayaient de prouver ceci en utilisant le théorème de la limite monotone sans utiliser la σ-additivité des mesures de probabilité.

- Définition de famille sommable.

- Certains candidats pensaient que le fait qu'une application linéaire est continue ssi elle est Lipschitzienne nécessite que les espaces soient de dimension finie.

- Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Certains candidats ne savaient pas expliquer pourquoi afin de trouver le PGCD de P, Q on peut soit appliquer l'algorithme d'Euclide, soit prendre les racines en commun (avec multiplicité) de P et Q.

- La vision géométrique (boule unité) des normes sur des espaces de dimension finie (même $\mathbb{R}^2$) est très mal assimilée.

- Les candidats sont souvent incapables de produire des contre-exemples aux théorèmes au programme une fois qu'une des hypothèses est relâchée (par exemple le lemme des noyaux est-il vrai si les polynômes sont seulement premier entre eux dans leur ensemble ?).

- La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si sa fonction génératrice G_X est dérivable en 1 : aucun des candidats à qui nous avons demandé de prouver ce résultat au programme n'a été capable de le faire de A à Z.

- Les candidats savent qu'en dimension infinie une famille orthonormale totale n'est pas forcément une base de l'espace vectoriel mais n'arrive généralement pas à donner un contre exemple convaincant.

- Le théorème chinois est quelques fois mal énoncé.

Comment débuter un exercice : L'abord d'un exercice difficile est peut-être la partie la plus épineuse de cet oral. Cependant les candidats devraient plus souvent avoir le réflexe de prendre des cas particuliers, faire des dessins, renforcer les hypothèses, établir des résultats partiels. Il est arrivé plusieurs fois qu'après $5-10$ minutes de réflexion du candidat, le jury soit obligé de proposer l'étude des cas triviaux $n = 1$ ou $n = 2$ ou de tenter de faire le lien avec des théorèmes au programme.

Quelques exemples d'exercices :

Nous avons choisi ici quelques exercices posés lors de cette session que nous n'avons pas retrouvés dans les livres classiques d'exercices de taupe. C'est la raison pour laquelle les exercices de probabilités et de géométrie sont sur-représentés. Les énoncés quelques fois informels sont précisés lors de la discussion avec le candidat.

Exercice 1. *Existe-il* $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{R}$ *tels que toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *obtenue en plaçant ces* n^2 *coefficients dans un tableau* $n \times n$ *soit inversible ? Peut-on le faire en choisissant* $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2} \in [1, 2]$ *?*

Exercice 2 (Itération de l'opérateur de Bernstein). *Pour $f \in \mathcal{C}^\circ([0,1],\mathbb{R})$ et $n \geq 1$ on note*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Montrer que pour tout $n_0 \geq 1$ on a

$$\underbrace{B_{n_0} \circ \ldots \circ B_{n_0}}_{k \text{ fois}}(f) \xrightarrow[k\to\infty]{\|\|_\infty} B_1(f).$$

Exercice 3 (La transposition est-elle un changement de base?). *Existe-il $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait*

$${}^tA = PAQ \quad ?$$

Exercice 4 (Balls in bins). *On lance n boules indépendamment et uniformément dans n boîtes. On note M_n le nombre maximal de boules dans une boîte. Etudier la variable aléatoire M_n quand $n \to \infty$ (elle est concentrée autour de $\log(n)/\log\log(n)$).*

Exercice 5 (Un théorème de Benjamini et Shamov (2015)). *Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une bijection Lipschitzienne de réciproque Lipschitzienne. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que l'on ait*

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}} |f(x) - x| \leq C \qquad \textit{ou alors} \qquad \sup_{x\in\mathbb{Z}} |f(x) + x| \leq C.$$

Exercice 6 (Suite équirépartie sur $\mathbb{R}$). *Existe-t-il une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ équirépartie au sens où pour tout $a < b, c < d \in \mathbb{R}$ on a*

$$\frac{\#\{0 \leq i \leq n : a \leq x_i \leq b\}}{\#\{0 \leq i \leq n : c \leq x_i \leq d\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b-a}{d-c}.$$

Exercice 7 (Loi du nombre de cycle d'une permutation uniforme). *Soit $\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ une permutation choisie uniformément au hasard. Montrer l'identité en loi*

$$\#\mathrm{Cycles}(\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Bernoulli}(1/k),$$

où les variables de Bernoulli sont indépendantes. En déduire que $\#\mathrm{Cycles}(\sigma_n)$ est concentré autour de $\log(n)$ avec grande probabilité.

Exercice 8 (Une équation différentielle retardée). *On pose y l'unique solution sur $[-1,\infty]$ qui soit continue et $\mathcal{C}^\infty$ sauf en $0, 1, 2, \ldots$ au problème*

$$\begin{cases} y(t) = 1 & t \in [-1, 0] \\ y'(t) = y(t-1) & t \geq 0. \end{cases}$$

Donner un équivalent de $y(t)$ quand $t \to \infty$.

Exercice 9 (Tranformée de Laplace). *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $\lambda > 0$ on pose*

$$\phi_X(\lambda) = \mathbb{E}[\exp(-\lambda X)].$$

Montrer que ϕ_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue en 0. Montrer que ϕ_X caractérise la loi de X.

Exercice 10 (Lois 1-stable positives). *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $X_1 + X_2 = 2X$ en loi où X_1 et X_2 sont deux copies indépendantes de X. Montrer que X est (presque sûrement) constante.*

Exercice 11 (Isométries pour $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$). *Sur $\mathbb{R}^n$ on considère la norme 1 notée $\| \|_1$ et la norme ∞ notée $\| \|_\infty$.*

1. *Caractériser les isométries linéaires pour la norme $\| \|_1$ (resp. pour $\| \|_\infty$).*
2. *On suppose que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire et que $\|AX\|_1 = \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $n = 1$ ou $n = 2$.*

Exercice 12 (Un théorème local limite). *Soit $X_1, X_2, ...$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et de support fini (non trivial). On forme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer qu'il existe $0 < C_1 < C_2 < \infty$ telles que pour tout $n \geq 1$*

$$\frac{C_1}{\sqrt{n}} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_n = k) \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 13. *Un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ admet-il toujours un sous-espace vectoriel strict stable?*

Exercice 14. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Combien faut-il au minimum modifier de coefficients de A pour que la matrice devienne inversible ?*

Exercice 15. *Enoncé le théorème de Heine et le démontrer. Réciproquement, quels sont les sous-ensembles $H \subset \mathbb{R}$ tels que toute fonction continue $f : H \to \mathbb{R}$ soit uniformément continue?*

Exercice 16. *Trouver tous les morphismes continus $(\mathbb{C}^*, \times) \to (\mathbb{C}^*, \times)$.*

Exercice 17. *Construire une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que ses seules isométries linéaires soient $\pm\mathrm{Id}$.*