

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES  
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2016

FILIÈRE PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

*Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.*

\* \* \*

Les parties I, II et III sont assez largement indépendantes. En particulier la partie II peut être traitée indépendamment de la partie I en admettant les trois premières questions et la partie III (exceptée la dernière question) indépendamment de la partie II. Il est cependant vivement conseillé de suivre la progression naturelle du problème.

## Notations

Dans le problème, pour tous entiers positifs non nuls  $n$  et  $k$ ,  $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$  désignera les matrices à coefficients réels de taille  $n \times k$ . Un vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$  sera considéré comme un vecteur colonne  $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  et  $u^T$  désignera le vecteur ligne obtenu par transposition. De même, pour  $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ ,  $M^T$  désignera la transposée de  $M$ .

On note  $\varphi$  la fonction de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ -t \ln(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

Soit  $N \geq 2$  un entier. On note  $\Sigma_N$  l'ensemble des vecteurs  $p \in \mathbb{R}^N$  tels que  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$  et  $p_i \geq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ . On remarquera que  $p$  peut être interprété comme une loi de probabilité sur  $\{1, \dots, N\}$ . On note également  $H_N$  la fonction définie sur  $\Sigma_N$  par

$$H_N(p) = \sum_{i=1}^N \varphi(p_i).$$

## Partie I

1. Vérifier que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $[0, +\infty[$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . Donner la limite de la dérivée  $\varphi'(t)$  de  $\varphi$  lorsque  $t$  tend vers 0 dans  $]0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $\Sigma_N$  est une partie fermée, bornée et convexe de  $\mathbb{R}^N$ .
3. Montrer que  $H_N$  est positive, continue sur  $\Sigma_N$  et calculer la valeur de  $H_N(p)$  lorsque  $p_i = 1/N$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$  (loi uniforme sur  $\{1, \dots, N\}$ ).
4. (a) Soient  $a$  et  $b$  dans  $]0, +\infty[$  tels que  $a < b$ . Montrer qu'il existe  $\epsilon \in ]0, b]$  tel que  $\varphi(a+t) + \varphi(b-t) > \varphi(a) + \varphi(b)$  pour tout  $t > 0$  tel que  $t \leq \epsilon$ .  
(b) En déduire que  $H_N$  atteint son maximum sur  $\Sigma_N$  en un unique point que l'on déterminera.
5. On note  $\Sigma_\infty$  l'ensemble des suites de réels  $p = (p_i)_{i \geq 1}$  telles que  $p_i \geq 0$  pour tout  $i \geq 1$  et  $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$ . On note  $H_\infty$  la fonction sur  $\Sigma_\infty$  définie par  $H_\infty(p) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi(p_i)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .  
(a) On considère  $a \in ]0, 1[$  et  $p_i = a(1-a)^{i-1}$  pour  $i \geq 1$ . Calculer  $H_\infty(p)$  et étudier ses variations en fonction de  $a$ .  
(b) Montrer qu'il existe  $p \in \Sigma_\infty$  telle que  $H_\infty(p) = +\infty$ . (Ind : On pourra utiliser sans démonstration que la série de terme général  $n^{-1} \ln(n)^{-\beta}$  pour  $n \geq 2$  converge si et seulement si  $\beta > 1$ ).
6. Soit  $n$  un entier strictement positif. On considère une famille  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $n$  variables aléatoires à valeurs dans  $\{1, \dots, N\}$ , deux à deux indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . On suppose de plus que  $\mathbf{P}(X_1 = i) = p_i$  et que  $p_i > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $\mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{n} \ln \left( \prod_{k=1}^n p_{X_k} \right) + H_N(p) \right| \geq \epsilon \right)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

## Partie II

Soient  $f \in \mathbb{R}^N$  et  $J_f : \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $J_f(p) = H_N(p) + \sum_{i=1}^N p_i f_i$ . On note

$$J_{f,*} = \sup \{ J_f(p) \mid p \in \Sigma_N \}$$

la borne supérieure de  $J_f$  sur  $\Sigma_N$  et  $\Sigma_N(f) = \{ p \in \Sigma_N \mid J_f(p) = J_{f,*} \}$  l'ensemble des  $p$  de  $\Sigma_N$  pour lesquels la borne supérieure est atteinte.

7. Montrer que  $\Sigma_N(f)$  est non vide.
8. Soit  $p \in \Sigma_N$ .  
(a) On suppose que  $p_1 = 0$  et  $p_2 > 0$ . Montrer alors qu'il existe  $p'$  dans  $\Sigma_N$  tel que  $J_f(p') > J_f(p)$  (on pourra chercher  $p'$  proche de  $p$ ).  
(b) En déduire que si  $p \in \Sigma_N(f)$ , alors  $p_i > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .
9. Soit  $p \in \Sigma_N$ . On suppose maintenant que  $p_i > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On note  $E_0 = \{ a \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N a_i = 0 \}$ .  
(a) Vérifier que  $E_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$  dont on donnera la dimension. Identifier l'orthogonal  $E_0^\perp$  de  $E_0$  pour le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^N$ .  
(b) Soient  $a \in E_0$  et  $\tilde{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  définie par  $\tilde{p}(t) = p + ta$ . Montrer qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\tilde{p}(t) \in \Sigma_N$  pour tout  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ . Calculer la dérivée de  $\tilde{p}$  en 0.

(c) On suppose de plus que  $p \in \Sigma_N(f)$ . Montrer que pour tout  $a \in E_0$ , on a  $\sum_{i=1}^N a_i(f_i - \ln(p_i)) = 0$ . En déduire qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$ , tel que  $\ln(p_i) = f_i + c$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

10. Identifier  $\Sigma_N(f)$ . Montrer que  $J_{f,*} = \ln(\sum_{i=1}^N e^{f_i})$ .

On considère maintenant  $F : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $F(\beta) = \frac{1}{\beta} \ln(\sum_{i=1}^N e^{\beta f_i})$

11. Montrer que  $F$  est dérivable et calculer sa dérivée  $F'$ . Montrer de plus que pour tout  $\beta \in ]0, +\infty[$ , il existe  $p(\beta) \in \Sigma_N(\beta f)$  tel que  $F'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} H_N(p(\beta))$ .

12. Etudier les limites de  $F$  en 0 et en  $+\infty$ .

## Partie III

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \{1, \dots, N\}$  une variable aléatoire de loi  $q \in \Sigma_N$ . On suppose que l'on dispose d'une famille finie  $g = (g_k)_{1 \leq k \leq d}$  de fonctions sur  $\{1, \dots, N\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et de la valeur  $\bar{g}_k = \mathbf{E}(g_k(X))$  de l'espérance de  $g_k(X)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, d\}$ .

On note

$$\Sigma_N(\bar{g}, g) = \left\{ p \in \Sigma_N \mid \sum_{i=1}^N p_i g_k(i) = \bar{g}_k, 1 \leq k \leq d \right\},$$

et on remarque que  $q \in \Sigma_N(\bar{g}, g)$  et que si  $p \in \Sigma_N(\bar{g}, g)$  alors pour toute variable aléatoire  $Y : \Omega \rightarrow \{1, \dots, N\}$  de loi  $p$ , on a  $\mathbf{E}(g_k(X)) = \mathbf{E}(g_k(Y))$ .

On cherche dans cette partie à déterminer les probabilités  $p$  de  $\Sigma_N(\bar{g}, g)$  sur lesquelles  $H_N$  atteint son maximum.

Soient  $M \in \mathcal{M}_{N,d}(\mathbb{R})$  définie par  $M_{i,j} = g_j(i)$  pour  $(i,j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, d\}$ ,  $p \in \Sigma_N$  et  $m \in \mathbb{R}^d$ . On note  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  la matrice carrée de taille  $d \times d$  définie pour tous  $(k,l) \in \{1, \dots, d\}^2$  par

$$A_{lk} = \sum_{i=1}^N p_i (M_{il} - m_l)(M_{ik} - m_k).$$

On note  $\widetilde{M} = (M | \mathbf{1}) \in \mathcal{M}_{N,d+1}(\mathbb{R})$  la matrice augmentée obtenue en ajoutant une colonne de 1 à droite de  $M$ .

13. Vérifier que si  $Y : \Omega \rightarrow \{1, \dots, N\}$  est une variable aléatoire de loi  $p$ , alors  $A_{lk} = \mathbf{E}((g_l(Y) - m_l)(g_k(Y) - m_k))$  puis que  $A$  est une matrice symétrique telle que  $\theta^T A \theta \geq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^d$ .

14. Soit  $\theta \in \mathbb{R}^d$  tel que  $\theta^T A \theta = 0$ . On suppose que  $p_i \neq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

(a) Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$ , que l'on précisera, tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on a  $\sum_{l=1}^d M_{il} \theta_l = c$ .

(b) Montrer que si  $\text{Ker} \widetilde{M} = \{0\}$  alors  $\theta = 0$ .

On note pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^d$ ,  $f(\theta) = M\theta \in \mathbb{R}^N$ ,  $Z(\theta) = \sum_{i=1}^N e^{f_i(\theta)}$  et

$$p(\theta) = \left( \frac{e^{f_1(\theta)}}{Z(\theta)}, \dots, \frac{e^{f_N(\theta)}}{Z(\theta)} \right) \in \Sigma_N$$

où  $f(\theta) = (f_1(\theta), \dots, f_N(\theta))$ . Enfin, on considère la fonction  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$L(\theta) = \ln(Z(\theta)) - q^T M\theta.$$

15. Montrer que  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer son gradient.
16. Montrer que si  $\theta$  est un point critique de  $L$  (c'est-à-dire en lequel le gradient de  $L$  s'annule) alors  $M^T p(\theta) = M^T q$  et  $p(\theta) \in \Sigma_N(\bar{g}, g)$ .
17. Montrer que  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que pour tous entiers  $1 \leq l, k \leq d$  on a

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_l \partial \theta_k}(\theta) = \sum_{i=1}^N p_i(\theta) (M_{il} - m_l(\theta))(M_{ik} - m_k(\theta))$$

où  $m(\theta) = M^T p(\theta)$ .

On suppose dorénavant que  $\text{Ker} \widetilde{M} = \{0\}$ .

18. On s'intéresse dans cette question au nombre de points en lesquels la fonction  $L$  atteint son minimum.
  - (a) Montrer que si  $\theta$  et  $\theta'$  sont deux points distincts de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $L$  admet un point critique en  $\theta$ , alors la dérivée de  $t \rightarrow L(t\theta + (1-t)\theta')$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et s'annule en  $t = 1$ .
  - (b) En déduire qu'il existe au plus un point critique pour  $L$  et conclure sur le nombre de points en lesquels  $L$  atteint son minimum.
19. On suppose que la fonction  $L$  a un minimum global atteint en  $\theta_*$ .
  - (a) Montrer que  $H_N(p(\theta_*)) \geq H_N(q)$  puis que  $H_N(p(\theta_*))$  est la valeur maximale de  $H_N$  sur  $\Sigma_N(\bar{g}, g)$ .
  - (b) Montrer que  $p(\theta_*)$  est l'unique point de  $\Sigma_N(\bar{g}, g)$  en lequel  $H_N$  atteint son maximum.

\* \*  
\*