

RAPPORT SUR L'EPREUVE ECRITE DE COMMENTAIRE DE DOCUMENT SESSION DE 2007

Le texte proposé pour la session 2007 est tiré du manuscrit inédit d'Alexandre Grothendieck intitulé *Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien**. Il s'agit là d'une méditation portant sur les mathématiques et sur sa vie. En juin 1983, Alexandre Grothendieck en rédige les premiers paragraphes. Cette rédaction va durer plus de trois ans et couvrira plus de mille cinq cents pages dactylographiées.

Alexandre GROTHENDIECK est né le 28 Mars 1928 à Berlin. En 1966, il obtient la médaille *Fields* (équivalent du Prix Nobel en mathématiques) avec ATIYAH, COHEN et SMALE, mais il refuse de se rendre à Moscou pour la recevoir. Il marque ainsi un signe de solidarité avec les écrivains DANIEL et SINIAVSKI, notamment contre le traitement que leur réserve le régime Soviétique.

De 1959 à 1971, il occupe un poste de professeur au prestigieux *Institut des Hautes Études Scientifiques* (IHES) de Bures-sur-Yvette. La collaboration GROTHENDIECK, SERRE (médaille Fields 1954) et DIEUDONNE donne alors naissance aux *Éléments de géométrie algébrique*.

En Avril 1988, l'*Académie Royale des Sciences de Suède* lui décerne le *Prix Crafoord*, avec l'un de ses anciens élèves, le belge Pierre DELIGNE. Mais dans une lettre, publiée par le journal « Le Monde » du 4 Mai de la même année, il annonce qu'il refuse ce prix, ainsi que les 270 001 dollars qui lui sont associés. En Octobre 1988, il part à la retraite.

Alexandre Grothendieck est considéré comme l'un des plus grands génies des mathématiques de tous les temps.

Le texte proposé est non seulement exemplaire de sa démarche *philosophique*, mais il

est centré sur un sujet qui, bien qu’ayant préoccupé assez fortement son auteur, n’a jamais été thématisé pour soi et de manière aussi explicite par GROTHENDIECK. C’est une notion qui, sur les traces d’Albert EINSTEIN, doit essentiellement sa naissance au XX^{ème} siècle et qui a pris le nom programmatique de « *théorie unitaire* ».

De façon tout à fait “naturelle”, ce fragment se découpe en trois parties argumentatives bien distinctes, précédées d’une très brève introduction définitionnelle, ce qui devait largement faciliter la démarche méthodologique des candidats. Avec ses trois parties bien distinctes, le texte proposé était parfaitement du type *self-contained*.

Après une brève définition nominale de ce qu’est sensé être une « *théorie unitaire* », l’auteur se tourne vers les deux conditions fondamentales qu’il voit dans l’approche nécessairement réflexive qu’exige cette question :

- 1) La première condition est de nature « *philosophique* ». Elle devra nécessairement (et avant tout) amener à s’interroger sur la notion de « *modèle mathématique* » appliqué à une « portion » de la réalité. Il ne s’agit pas ici, à proprement parler, de la « *théorie des modèles* » conçue comme branche de la Logique Mathématique ou théorie logique de la vérité mathématique, et qui consiste essentiellement à dire qu’une théorie est mathématiquement valide si on peut définir un univers dans lequel elle est vraie. L’une des applications de ce concept (logique) de modèle serait, par exemple, de prouver qu’une théorie ou un système d’axiomes n’est pas contradictoire en exhibant un modèle satisfaisant tous les axiomes.

Le concept de « *modèle* » est pris ici par Grothendieck en un sens à la fois plus “large”, tout en étant précisé par sa qualification de « *mathématique* ». Un axiome en effet est *logique* s’il est valide pour *toute* structure, et *mathématique* autrement. Un « *axiome mathématique* » est “valide” seulement dans des *structures particulières* — ce que précise de manière restrictive l’indication de « *portion de la réalité* ». Mais ce que GROTHENDIECK a effectivement en vue, c’est ce qu’il appelle l’« *axiome tacite du physicien* », vestige fossile des visions

* Alexandre GROTHENDIECK, *Récoltes et semailles*. Chapitre 2. *Promenade à travers une œuvre ou l’Enfant et la Mère*. § 2.20. *Coup d’œil chez les voisins d’en face*, p. 80 (transcription d’Yves Pocchiola).

pythagoriciennes du « Tout est nombre ». Or, ce résultat profond d'une mathématisation de la nature (saisie comme un “grand livre écrit en caractères mathématiques” selon Galilée), qui, à l'origine de la « philosophie naturelle » sera renforcé par l'entreprise newtonienne d'un modèle mathématique à la fois *univoque* et *parfait* (conçu comme langage *mécaniste* et *absolu*), s'est peut-être transformé en un nouvel obstacle épistémologique que l'auteur décrit comme « le nouveau cercle *invisible* » limitant l'Univers du physicien contemporain. Ce qui fut un cercle libérateur et instaurateur de la « science nouvelle », semble aujourd'hui s'être hypostasié en un véritable obstacle « *métaphysique* », objet d'un nouveau *consensus*. Il serait dès lors aussi contraignant qu'avait pu l'être l'idée d'un « monde *clos* » de type aristotélicien opposé à l'« univers *infini* » de type brunien. Il est donc indispensable de soumettre cet axiome à une « critique serrée », et même de *démontrer* qu'il « n'est pas fondé ».

Ce qui est ici *philosophiquement* attaqué, c'est l'idée même d'unicité d'un « *modèle* rigoureux *unique* » qui serait en mesure de rendre compte de *tous* les phénomènes « physiques » identifiés jusqu'ici.

On pourrait déjà songer ici à la relance de la question à travers les projets contemporains à prétention « hyper-unitaires » des diverses « *Theories Of Everything* ».

À noter que les candidats pouvaient également commenter la parenthèse consacrée au remplacement « haut la main » de la « race des “philosophes de la nature” » par les ordinateurs. Ce qui pourrait s'interpréter comme une suite destinalement “logique” du « pythagorisme », ou comme la marque d'un rapport de cause à effet dû à la fois au retrait de la réflexion « philosophique » hors du champ et de la pratique des physiciens contemporains et à la séparation radicale de ces deux domaines de pensée.

- 2) La seconde condition indispensable pour affronter la question d'une « théorie unitaire », et qui est entièrement subordonnée à la première condition d'*ordre essentiellement philosophique*, c'est la « question “technique” » du dégagement d'un « modèle explicite ». Il faut noter que

GROTHENDIECK a *inversé* ici l'ordre habituel des conditions (qui, précisément, ne correspond plus à l'ordre “classique” de la « philosophie de la nature » “classique”) ; pour lui *la pensée commande la technique, et ce n'est pas la technique qui précède la pensée*. Dès lors, l'abord nouveau de l'aspect “technique” de la question « unitaire » implique une seconde remise en question de ce que l'auteur qualifie de « deuxième axiome tacite du physicien ». Cet axiome concerne la nature *supposée continue* de l'espace-temps, et donc la *topologie* même des phénomènes physiques.

Face à cette antique approche de l'espace et du temps profondément liée à « notre mode de perception », c'est-à-dire à l'immédiateté même de notre rapport au monde, GROTHENDIECK avoue avoir été impressionné par une remarque “en passant” du fondateur de la géométrie différentielle moderne, Bernhardt RIEMANN. Sur le plan technique cette fois, le physico-mathématicien contemporain semblerait confronté à un autre « cercle invisible », faisant également *consensus*, second obstacle épistémologique faisant barrage à une approche nouvelle de la question des « théories unitaires ». Dans le cas des deux « axiomes tacites du physicien », c'est de leur caractère de *simplification* excessive (et bien trop radicale) dont il s'agit de se dégager, cette trop grande approximation empêchant de pouvoir rendre compte d'une réalité bien plus *complexe* qu'elle n'apparaît à l'intuition perceptive. GROTHENDIECK note finalement que cette nouvelle posture de la pensée physico-mathématique pourrait être confortée, dans le choix d'un point de vue « *discontinu* », par la pure et simple « logique ».

À l'appui de cette position grothendieckienne, on pourra penser (par exemple) à trois échanges épistolaires entre Albert EINSTEIN et son ami suisse (et ancien collègue au Bureau des brevets de Berne), Michele BESSO.

Dans une lettre du 24/27 décembre 1920 adressée à Albert EINSTEIN, on peut lire ceci : « Tu te souviens des spéculations sur la géométrie *non-archimédienne* (dans laquelle il faut poser comme inégales des grandeurs dont la différence est infiniment petite) ? Que le continu physique doive encore jouer un rôle quelque part, nous l'avons souvent remarqué — voir

la seconde hypothèse de Riemann, selon laquelle l'espace est soumis aux nombres. Sous *quelles conditions* les divers invariants de la théorie de Weyl pourraient-ils rester par principe indiscernables ? »¹. Cinq ans plus tard, le 9 juin 1925, BESSO poursuit : « Au cours de conversations [...] avec GONSETH, j'ai posé une série de questions [pour] savoir si les difficultés logiques [touchant la géométrie générale de SCHOUTEN et le quantique et] concernant le continu *ne se rapporteraient pas en définitive à un ensemble de considérations mathématiques fondamentalement différent, qui ne s'adapterait correctement qu'à la réalité du discontinu* »². Enfin, EINSTEIN reprendra ce thème de Princeton, le 10 août 1954, dans les termes suivants : « J'admetts [...] comme parfaitement possible que la physique puisse ne pas être fondée sur la notion de champ, *c'est-à-dire sur des éléments continu* »³.

Après cette remise en question du rapport continu / discontinu qui habite aussi bien la physique que la mathématique de notre temps, GROTHENDIECK aborde les conditions de possibilité indispensables pour « trouver un modèle “satisfaisant” ». Pour lui, tout repose sur la mise en œuvre d'une qualité fort rare de « grande imagination conceptuelle » relevant du « flair ». Ce qui, en d'autres termes, signifie que cette imagination relève avant tout d'un « art », c'est-à-dire d'une forme d'*intuition intellectuelle* qui, par construction d'expériences de pensée (et c'est sans doute là l'un des enjeux de ses références à EINSTEIN et à SCHRÖDINGER), permettra d'appréhender et de mettre à jour (c'est-à-dire de dégager et d'exhiber) des structures mathématiques absolument inédites. Cette insistance sur la notion de « structure » peut être raccrochée à la notion de « modèle mathématique » tel que pouvait l'entendre Bourbaki : une théorie des « espèces de structures ». Plutôt que de se limitater à *un seul* modèle, l'auteur envisage la possibilité d'une “variété” de modèles aptes à des « raccordements » (ce qui pourrait faire penser à des raccordements du type “cartes” géométrico-

¹. Albert EINSTEIN, Michele BESSO, *Correspondance 1903-1955*, Hermann, « Collection Histoire de la Pensée », Paris, 1972, Lettre 54, p. 162.

². *Ibidem*, Lettre 75, p. 207.

différentielles), qu'il soit question de structures indexées sur le « « continu » », sur le « « discret » » ou « de nature « mixte » ».

C'est sans nul doute à sa propre pratique heuristique que songe ici Grothendieck, et « en pleine connaissance de cause ».

Il serait légitime de renvoyer à deux « modèles » récents aptes à illustrer ces conditions grothendieckienennes : la résolution du théorème de Fermat par Andrew WILES en 1994, ou celle de la conjecture de Poincaré par Grigori PERELMAN en 2006.

- 3) Enfin, l'auteur de *Récoltes et semailles* passe à une sorte de conclusion qui prend expressément la forme d'une « conjecture *philosophique* », partiellement prophétique, et aujourd'hui dans le *suspens* de son caractère (pour l'instant et provisoirement) « indécidable ».

GROTHENDIECK « prévoit » que le renouvellement tant attendu devra venir, mais « plutôt d'un mathématicien dans l'âme ». Il faut noter le « bémol » mis à cette attente, et qui en fait bien autre chose qu'une issue qui serait assurée à l'avance : « (s'il doit encore venir...) ». Rien n'est moins certain, et seules les conditions dégagées par le texte semblent en mesure de préparer effectivement le terrain d'une réussite future.

Cette apparente limitation au « mathématicien », que les candidats pourraient légitimement contester comme argument *pro domo*, si ce n'est *ad hominem*, est immédiatement pondérée par la précision « bien informée des grands problèmes de la physique », à égalité avec l'action d'un éventuel physicien.

Mais, précision plus contraignante encore, ils devront, mathématicien ou physicien, être dans l'« ouverture *philosophique* ». Et derechef, à contre-courant des idées « positivistes » dominantes et d'un *consensus* trop facilement partagé par la majorité des scientifiques, GROTHENDIECK renoue avec la lettre initiale de son texte, affirmant qu'il n'est nullement question ici d'un problème « de nature *technique*, mais bien [*d'un problème fondamental de « philosophie de la nature »*] ». C'est le noyau central de ce texte singulier qui en appelle au nouage mathématique-

³. *Ibidem*, Lettre 210, p. 529.

physique-*philosophie*, à l'encontre d'une vision techniciste simplement réductrice qui ne saurait qu'être promise à une impasse dans la recherche d'une « théorie unitaire ». Alexandre GROTHENDIECK a par ailleurs souvent déclaré dans son autobiographie qu'il ne s'était jamais considéré comme un « calculateur » exceptionnel, mais “simplement” comme un mathématicien « plutôt lent » et *spéculatif*.

Par ce passage de l'aspect « technique » au second plan, l'auteur s'inscrit bel et bien dans la lignée d'EINSTEIN ou de SCHRÖDINGER, qui sont toujours remontés jusqu'aux “principes” de leur discipline, tout en n'ayant eu de cesse d'en interroger toutes les implications philosophiques. On pourrait dire, en dernière instance, que les enjeux entre les différents courants de la physique contemporaine restent *aujourd'hui encore* d'ordre essentiellement philosophique.

L'image du « mathématicien dans l'âme, bien informé des grands problèmes de la physique » et doté d'une « grande imagination conceptuelle » pouvait ainsi faire penser à Alain CONNES et à sa *géométrisation non-commutative* de la physique.

L'option « discontinuiste » ou “granulaire” pouvait légitimement renvoyer à la *théorie de la gravitation quantique à boucles (Loops Quantum Theory)* de Carlo ROVELLI et de Lee SMOLIN.

Enfin, reprenant un passage d'une lettre d'EINSTEIN à Wolfgang PAULI datée de 1948, et où le théoricien de la relativité générale s'exprime en ces termes : « Je vous ai dit plus d'une fois que je suis un partisan acharné non pas des équations différentielles, mais bien du principe de relativité générale, dont la force heuristique nous est indispensable. Or, en dépit de bien des recherches, je n'ai pas réussi à satisfaire le principe de relativité générale autrement que grâce à des équations différentielles ; peut-être quelqu'un découvrira-t-il une autre possibilité, s'il cherche avec assez de persévérance »⁴ — on pouvait établir une liaison avec les développements de la *théorie de relativité d'échelle* de Laurent NOTTALE.

Ces trois approches ont bien en commun un « retour aux principes »

⁴. Albert EINSTEIN, *Œuvres choisies 1. Quanta*, Seuil /CNRS, Paris, 1989, p. 249.

fondamentaux d'une "*philosophie de la nature*", à la fois *en deçà* et *parallèlement* à leur déploiement d'un dispositif proprement technique.

Comme l'an dernier, des directives précises et explicites ont été données aux candidats en début d'épreuve :

a) bien prendre soin de lire attentivement le texte à commenter avant de composer (il leur a été accordé, comme l'année dernière, une demi-heure pour d'éventuelles questions linguistiques en dehors du temps d'épreuve) ;

b) illustrer l'argumentation et la problématique proposées à travers des exemples tirés d'une (ou de plusieurs) discipline(s) scientifique(s) fréquentée(s) par le candidat, cette opération présupposant une explicitation des enjeux théoriques mis en jeu par le texte à commenter.

Cependant, des candidats ont des difficultés certaines à saisir le protocole de l'épreuve, et se demandent encore s'ils doivent « donner leur opinion personnelle », plutôt que de « commenter » et expliciter la problématique de l'auteur. Il leur est donc fortement conseillé de prendre connaissance des rapports d'épreuve qui sont à leur disposition sur le site de l'École.

À nouveau, les bonnes copies ont su assez bien proposer des illustrations classiques ou contemporaines de l'argumentaire proposé, et saisir l'enjeu "philosophique" soutenu par l'auteur.

Il a ainsi été fait recours aussi bien :

- au débat CANTOR-DEDEKIND sur le continu et la construction de l'ensemble des réels, ainsi qu'aux relations entretenues aux autres ensembles de nombres (insistant même sur le "fait" que « les mathématiciens sont, dans leur essence, des philosophes, et ce depuis l'Antiquité ») ;
- au modèle de la mécanique analytique et à ses différentes formulations (formulation lagrangienne et formulation hamiltonienne) comme moyens d'aboutir à une « unité des formes », la notion de force étant alors considérée plus comme un concept mathématique que comme une « chose », et le concept de « champ » devenant alors « chose vraie » et *visible* par *construction* ;
- aux correspondances entre différentes structures mathématiques sur la base de « similarités structurales » (à travers les exemples du traitement contemporain des théorèmes de GAUSS-BONNET, de POINCARE-HOPF, ou de la théorie unitaire D'ATIYAH-SINGER), tout en insistant sur le « besoin d'esprits ouverts pour opérer

les bonnes connexions entre domaines qui semblent au premier abord différents ». Un candidat a pu ainsi conclure par cette phrase : « *The world is still simple, but in a more sophisticated way* » ;

- aux travaux de Samuel TING (Prix Nobel de Physique 1976) et à sa découverte du J/ψ (méson sans saveur composé d'un quark charm et d'un antiquark charm). Le candidat a su présenter cet exemple comme celui d'une tentative de « prouver *la vérité* et *le sens* derrière le nombre et le diagramme », insistant sur le fait qu'au-delà des résultats techniques, c'est bien *le sens* qu'il s'agit de dégager.
- aux travaux d'Alain CONNES et de Georges SKANDALIS considérés comme « modèles » grothendickiens manifestant une « grande imagination conceptuelle » à travers leur combinaison des espaces géométriques et des algèbres d'opérateurs ;
- aux *Theories Of Everything*, aux théories des (super)cordes (mais essentiellement pour y indiquer une « absence de fondement expérimental), à la *Quantum Loop Gravity*, mais aussi bien au modèle maxwellien de la *théorie électro-faible* et des *bosons de Higgs*.

Finalement, les meilleurs candidats ont insisté sur le rôle fondamental d'une approche philosophique, tant par rapport aux questions purement « techniques », que dans l'espoir de transcender la division de la réalité en disciplines séparées. Il a été par exemple noté que la « multiplicité des modèles » pouvait faciliter le « dialogue » des humanités et des sciences contemporaines. Plus ciblées, de nombreuses critiques ont visé aussi bien les « arguments réalistes » qu'un « positivisme dominant ».

Sur 18 copies, 16 ont obtenu plus que la moyenne, les deux autres étant nettement en dessous (7 et 4). On note trois 16 ; trois 15,5 ; quatre 15 ; deux 14,5 ; un 14 ; trois 13,5.

Malgré ces bons résultats, il semble néanmoins que le niveau de l'épreuve ait subi un net fléchissement. Le parallélisme entre les notes obtenues par les différents candidats aux épreuves de spécialité et celles obtenues à l'épreuve de « commentaire de texte » reste toujours d'actualité.

Charles Alunni.