EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE: MATHEMATIQUE

EXERCICE 1.

1. Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.
2. Démontrer que pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2]$, tout $x \geq \frac{16}{\varepsilon^2}$, on a l'inégalité $x \geq \frac{4}{\varepsilon} \log(1 + x)$.
3. On note par $\mathbb{N}^+$ l'ensemble des entiers strictement positifs, i.e. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$. On rappelle que $m \in \mathbb{N}^+$ est un diviseur de $n \in \mathbb{N}^+$ s'il existe $p \in \mathbb{N}^+$ tel que $n = mp$. Etant donné $n \in \mathbb{N}^+$ on note par $d(n)$ le nombre de diviseurs différents de n. Démontrer que $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \cdots, k$ la décomposition de n en facteurs premiers. Démontrer que $d(n) = (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_k)$.
5. Soit la suite $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{n} n^n}{e^n n!} \, .$$

   Démontrer que u_n converge vers une limite non nulle. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, on a l'inégalité $n \log(n) \leq C + 2 \log(n!)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \cdots, k$ la décomposition de n en facteurs premiers. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, on a l'inégalité $k \log(k) \leq C + 2 \log(n)$.
7. Démontrer que pout tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, on a l'inégalité $\log(d(n)) \leq C + \varepsilon \log(n)$.
8. Démontrer que pout tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d(n)}{n^\delta} = 0 \, .$$

9. Si A est un ensemble fini, on note par $\#(A)$ le nombre d'éléments de A. Pour $n, m \in \mathbb{N}^+$, on pose

$$s(n,m) = \#\Big\{(x,y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \ : \ n = x^2 - y^2, \quad m \le y \le 2m\Big\}.$$

Démontrer que pour tout $\delta > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m, n \in \mathbb{N}^+$, on a l'inégalité $s(n,m) \le C m^\delta$.

EXERCICE 2.

L'exercice porte sur les symboles de Steinberg et sur la loi de réciprocité de Weil.

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Soit K un corps commutatif; on note $K^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de K. Soit $(\Gamma, +)$ un groupe abélien. Un symbole (ou symbole de Steinberg) relatif au corps K et à valeurs dans $(\Gamma, +)$ est une application

$$\phi : K^\times \times K^\times \to \Gamma$$

qui satisfait les propriétés suivantes:

(S1) $\phi(a\,b, c) = \phi(a, c) + \phi(b, c)$ et $\phi(a, b\,c) = \phi(a, b) + \phi(a, c)$ pour tous $a, b, c \in K^\times$;

(S2) $\phi(a, 1 - a) = 0$ pour tout $a \in K^\times$, $a \neq 1$.

1. Montrer que
$$-r = \frac{1 - r}{1 - r^{-1}}$$
pour tout $r \in K^\times$, $r \neq 1$.

2. Soit $\phi : K^\times \times K^\times \to \Gamma$ un symbole. Montrer les identités suivantes.
   (a) $\phi(a, 1) = \phi(1, a) = 0$ pour tout $a \in K^\times$.
   (b) $\phi(a, -a) = 0$ pour tout $a \in K^\times$.
   (c) $\phi(a, a) = \phi(a, -1) = \phi(-1, a)$ pour tout $a \in K^\times$.
   (d) $\phi(a, b) + \phi(b, a) = 0$ pour tous $a, b \in K^\times$.

3. On suppose désormais que $K = \mathbb{C}(t)$ est le corps des fractions rationnelles complexes, c'est-à-dire le corps de fractions de l'anneau des polynômes complexes $\mathbb{C}[t]$ à une indéterminée. Etant donné un polynôme non nul P, on note $\deg(P)$ son degré et $c(P)$ son coefficient dominant. On rappelle que ces invariants s'étendent aux fractions rationnelles en posant $\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q)$ et $c\left(\frac{P}{Q}\right) = c(P)/c(Q)$.

(a) Pour tout $f \in K^\times$, montrer qu'il existe un unique entier $v_0(f)$ et un unique scalaire $\lambda_0(f) \in \mathbb{C}^\times$ tels que

$$\lim_{t \to 0} t^{-v_0(f)} f(t) \;=\; \lambda_0(f)\,.$$

(b) Montrer que $v_0 : K^\times \to \mathbb{Z}$ et $\lambda_0 : K^\times \to \mathbb{C}^\times$ sont des morphismes de groupes.

(c) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcc} \phi_0 : K^\times \times K^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ (f, g) & \mapsto & (-1)^{v_0(f)\, v_0(g)}\, \lambda_0(f)^{v_0(g)}\, \lambda_0(g)^{-v_0(f)} \end{array}$$

est un symbole à valeurs dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{C}$.

(d) Calculer $\phi_0(f, t)$ pour tout $f \in \mathbb{C}[t]$, $f \neq 0$.

4. On pose
$$\phi_\infty\big(f(t), g(t)\big) := \phi_0\Big(f(\frac{1}{t}), g(\frac{1}{t})\Big).$$
Pour $f, g \in K^\times$, exprimer $\phi_\infty(f, g)$ en termes des degrés et des coefficients dominants de f et g. En déduire que $\phi_\infty(f(t+\alpha), g(t+\alpha)) = \phi_\infty(f(t), g(t))$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tous $f(t), g(t) \in K^\times$, on pose

$$\phi_\alpha\big(f(t), g(t)\big) := \phi_0\Big(f(t+\alpha), g(t+\alpha)\Big).$$

Si $f, g \in K^\times$, montrer que les $\phi_\alpha\big(f, g\big)$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) sont presque tous égaux à 1. En déduire que la formule

$$(f, g) \mapsto \phi(f, g) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}} \phi_\alpha(f, g)$$

définit un symbole $\phi : K^\times \times K^\times \to \mathbb{C}^\times$.

6. Montrer que $\phi \times \phi_\infty = 1$. [Indication : montrer que $\phi(f(t+\alpha), g(t+\alpha)) = \phi(f(t), g(t))$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et utiliser (S_1).]

7. Soient $A, B, C, D \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. On pose $f = \frac{A}{B}$, $g = \frac{C}{D} \in K^\times$. Montrer que

$$(-1)^{\deg(f)\,\deg(g)}\, c(g)^{\deg(f)}/c(f)^{\deg(g)} =$$

$$\prod_{C(\alpha)=0} f(\alpha) \times \prod_{D(\alpha)=0} f(\alpha)^{-1} \times \prod_{A(\alpha)=0} g(\alpha) \times \prod_{B(\alpha)=0} g(\alpha)^{-1},$$

où les indices sont pris sur les zéros des polynômes avec multiplicité.

EXERCICE 3.

On note par $\mathbb{N}^+$ l'ensemble des entiers strictement positifs, i.e. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note par $[x]$ la partie entière de x, i.e. le plus grand nombre entier $\leq x$. Etant donné un nombre entier $n \geq 6$, on note par $s(n)$ le nombre maximal de représentations de n comme somme de trois nombres différents de $\mathbb{N}^+$ tel que chaque nombre de $\mathbb{N}^+$ peut intervenir au plus dans une représentation. Par exemple $s(18) = 3$ car

$$18 = 1 + 6 + 11 = 2 + 4 + 12 = 3 + 5 + 10$$

et il n'est pas possible de représenter 18 comme la somme de 3 entiers strictement positifs de 4 manières différentes telles que les 12 nombres intervenant dans les différentes représentations soient distincts. Le but de cet exercice est de démontrer que $s(n) = [\frac{2n-3}{9}]$.

1. Démontrer que $s(n) \leq \frac{n}{3}$.
2. Démontrer que $s(n) \leq [\frac{2n-3}{9}]$.
3. Soit $m \geq 1$ un entier impair. Démontrer que l'on peut répartir les nombres $1, 2, \cdots, 3m$ dans m groupes de trois nombres tels que la somme dans chaque groupe soit la même et tels que les nombres $2m+1, \cdots, 3m$ soient dans des groupes différents.
4. Démontrer que si $[\frac{2n-3}{9}]$ est impair alors $s(n) \geq [\frac{2n-3}{9}]$.
5. Soit $k \geq 1$ un nombre entier. Démontrer que les nombres $1, \cdots, 4k$ peuvent être répartis en $2k$ couples tels que les sommes des membres dans chaque couple soit différentes et $\leq 5k + 1$.
6. Démontrer que si $[\frac{2n-3}{9}]$ est pair alors $s(n) \geq [\frac{2n-3}{9}]$.

SCIENTIFIC TESTS: MATHEMATICS

EXERCICE 1.

1. Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges.

2. Prove that for every $\varepsilon \in (0, 1/2]$, every $x \geq \frac{16}{\varepsilon^2}$, the following inequality holds $x \geq \frac{4}{\varepsilon} \log(1 + x)$.

3. We denote by $\mathbb{N}^+$ the set of positive integers, i.e. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Let us recall that $m \in \mathbb{N}^+$ is a divisor of $n \in \mathbb{N}^+$ if there exists $p \in \mathbb{N}^+$ such that $n = mp$. For a given $n \in \mathbb{N}^+$, we denote by $d(n)$ the number of distinct divisors of n. Show that $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.

4. Let $n \in \mathbb{N}^+$ and let $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \cdots, k$ be the prime factorization of n. Prove that $d(n) = (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_k)$.

5. Consider the sequence $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ defined by

$$u_n = \frac{\sqrt{n} n^n}{e^n n!} \,.$$

Show that u_n converges to a nonzero limit. Prove that, as a consequence, there exists a constant $C > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}^+$, we have the inequality $n \log(n) \leq C + 2 \log(n!)$.

6. Let $n \in \mathbb{N}^+$ and let $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \cdots, k$ be the prime factorization of n. Prove that there exists a constant $C > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}^+$, one has the inequality $k \log(k) \leq C + 2 \log(n)$.

7. Prove that for every $\varepsilon > 0$ there exists a constant $C > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}^+$, one has the inequality $\log(d(n)) \leq C + \varepsilon \log(n)$.

8. Prove that for every $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d(n)}{n^\delta} = 0 \,.$$

9. For a finite set A, we denote by $\#(A)$ the number of elements of A. For $n, m \in \mathbb{N}^+$, we set

$$s(n,m) = \#\Big\{(x,y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \ : \ n = x^2 - y^2, \quad m \leq y \leq 2m\Big\}.$$

Prove that for every $\delta > 0$ there exists a constant $C > 0$ such that for every $m, n \in \mathbb{N}^+$, one has the inequality $s(n,m) \leq Cm^\delta$.

EXERCISE 2.

The exercise deals with Steinberg's symbols and Weil's reciprocity law.

We denote by $\mathbb{C}$ the field of complex numbers. Let K be a commutative field; we denote by $K^\times$ the multiplicative group of invertible elements of K. Let $(\Gamma, +)$ be an abelian group. By a symbol (or Steinberg's symbol) relative to the field K and with value in $(\Gamma, +)$, we mean a map

$$\phi : K^\times \times K^\times \to \Gamma$$

satisfying the following properties:

(S1) $\phi(a\,b, c) = \phi(a, c) + \phi(b, c)$ et $\phi(a, b\,c) = \phi(a, b) + \phi(a, c)$ for any $a, b, c \in K^\times$;

(S2) $\phi(a, 1-a) = 0$ for any $a \in K^\times$, $a \neq 1$.

1. Show that
$$-r = \frac{1-r}{1-r^{-1}}$$
for any $r \in K^\times$, $r \neq 1$.

2. Let $\phi : K^\times \times K^\times \to \Gamma$ be a symbol. Show the following identities.
   (a) $\phi(a, 1) = \phi(1, a) = 0$ for any $a \in K^\times$.
   (b) $\phi(a, -a) = 0$ for any $a \in K^\times$.
   (c) $\phi(a, a) = \phi(a, -1) = \phi(-1, a)$ for any $a \in K^\times$.
   (d) $\phi(a, b) + \phi(b, a) = 0$ for any $a, b \in K^\times$.

3. From now on, we assume that $K = \mathbb{C}(t)$ is the field of complex rational functions, namely the fraction field of the ring $\mathbb{C}[t]$ of complex polynomials in one indeterminate. Given a non zero polynomial P, we denote by $\deg(P)$ its degree and by $c(P)$ its leading coefficient. We recall that those invariants extend to rational functions by setting $\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q)$ and $c\left(\frac{P}{Q}\right) = c(P)/c(Q)$.
   (a) For any $f \in K^\times$, show that there exists a unique integer $v_0(f)$ and a unique scalar $\lambda_0(f) \in \mathbb{C}^\times$ such that
$$\lim_{t\to 0} t^{-v_0(f)}\, f(t) \;=\; \lambda_0(f)\,.$$

(b) Show that $v_0 : K^\times \to \mathbb{Z}$ and $\lambda_0 : K^\times \to \mathbb{C}^\times$ are group homomorphisms.

(c) Show that the map

$$\begin{array}{rcl} \phi_0 : K^\times \times K^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ (f,g) & \mapsto & (-1)^{v_0(f)\,v_0(g)}\,\lambda_0(f)^{v_0(g)}\,\lambda_0(g)^{-v_0(f)} \end{array}$$

is a symbol with value in the multiplicative group $\mathbb{C}^\times$ of the invertible elements of $\mathbb{C}$.

(d) Compute $\phi_0(f,t)$ for any $f \in \mathbb{C}[t]$, $f \neq 0$.

4. We define

$$\phi_\infty\big(f(t), g(t)\big) := \phi_0\Big(f(\frac{1}{t}), g(\frac{1}{t})\Big).$$

Given $f, g \in K^\times$, compute $\phi_\infty(f,g)$ in terms of the degrees and the leading coefficients of f and g. Deduce from this that $\phi_\infty(f(t+\alpha), g(t+\alpha)) = \phi_\infty(f(t), g(t))$ for all $\alpha \in \mathbb{C}$.

5. For all $\alpha \in \mathbb{C}$ and all $f(t), g(t) \in K^\times$, we define

$$\phi_\alpha\big(f(t), g(t)\big) := \phi_0\Big(f(t+\alpha), g(t+\alpha)\Big).$$

Given $f, g \in K^\times$, show that the $\phi_\alpha\big(f,g\big)$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ are almost all equal to 1. Deduce from this that the formula

$$(f,g) \mapsto \phi(f,g) \mapsto \prod_{\alpha \in \mathbb{C}} \phi_\alpha(f,g)$$

defines a symbol $\phi : K^\times \times K^\times \to \mathbb{C}^\times$.

6. Show that $\phi \times \phi_\infty = 1$. [Hint : show that $\phi(f(t+\alpha), g(t+\alpha)) = \phi(f(t), g(t))$ for all $\alpha \in \mathbb{C}$ and use (S_1).]

7. We are given polynomials $A, B, C, D \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$ which are pairwise coprime. Put $f = \frac{A}{B}$, $g = \frac{C}{D} \in K^\times$. Show that

$$(-1)^{\deg(f)\,\deg(g)}\; c(g)^{\deg(f)}/c(f)^{\deg(g)} = \prod_{C(\alpha)=0} f(\alpha) \times \prod_{D(\alpha)=0} f(\alpha)^{-1} \times \prod_{A(\alpha)=0} g(\alpha) \times \prod_{B(\alpha)=0} g(\alpha)^{-1},$$

where n-fold zeros are to be counted n times.

EXERCISE 3.

We denote by $\mathbb{N}^+$ the set of positive integers, i.e. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$. For $x \in \mathbb{R}$ we denote by $[x]$ the integer part of x, i.e. the largest integer $\leq x$. For a given integer $n \geq 6$, we denote by $s(n)$ the largest number of representations of n as a sum of three different numbers of $\mathbb{N}^+$ such that every number of $\mathbb{N}^+$ can not be involved in more than one representation. For instance $s(18) = 3$ since

$$18 = 1 + 6 + 11 = 2 + 4 + 12 = 3 + 5 + 10$$

and it is impossible to represent 18 as a sum of 3 positive integers in 4 different ways so that all 12 numbers involved in the different representations to be different. The goal of this exercise is to show that $s(n) = [\frac{2n-3}{9}]$.

1. Prove that $s(n) \leq \frac{n}{3}$.
2. Prove that $s(n) \leq [\frac{2n-3}{9}]$.
3. Suppose that $m \geq 1$ is an odd integer. Prove that we can partition the numbers $1, 2, \cdots, 3m$ in m sets of three numbers each such that the sum in each set is the same and the numbers $2m + 1, \cdots, 3m$ are in different groups.
4. Prove that if $[\frac{2n-3}{9}]$ is an odd integer then $s(n) \geq [\frac{2n-3}{9}]$.
5. Let $k \geq 1$ be an integer. Show that the numbers $1, \cdots, 4k$ can be divided in $2k$ pairs such that the sums of the members in each pair are different and $\leq 5k + 1$.
6. Prove that if $[\frac{2n-3}{9}]$ is an even integer then $s(n) \geq [\frac{2n-3}{9}]$.