EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE: MATHEMATIQUE

On note $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers naturels, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers ≥ 0, $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers > 0. On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.

EXERCICE 1.

Notations : Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Étant donné un intervalle compact I, on note $C^0_{\mathrm{pm}}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et à valeurs réelles sur I. Enfin étant donné un sous-ensemble $X \subset I$ on note $\mathbf{1}_X$ la fonction caractéristique de X.

Soit k un entier naturel ≥ 2. Dans cet exercice on se propose d'étudier le spectre des matrices $A = (A_{ij})$ symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ et telles que

$$(1) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = k.$$

C'est aussi une façon de revisiter les polynômes de Tchebitcheff. Étant donné un entier $r \geq 1$ nous notons A_r la matrice symétrique $n \times n$ de coefficients

$$(A_r)_{ij} = \# \left\{ (i_0, \ldots, i_r) \ : \ \begin{array}{l} i_0 = i,\ i_r = j,\ i_{l-1} \neq i_{l+1}\ (\forall l \in \{1, \ldots, r-1\}) \\ \text{et } A_{i_0 i_1} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{r-1} i_r} \neq 0 \end{array} \right\}.$$

On note I_n la matrice identité de taille $n \times n$.

Première partie

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $U_m \in \mathbb{Z}[X]$ ($m \in \mathbb{N}$) tels que
$$U_m(\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \ (\theta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}).$$
Montrer que cette suite vérifie la relation de récurrence :
$$U_{m+1}(x) = 2xU_m(x) - U_{m-1}(x).$$
Quel est le degré de U_m ?

2. Montrer que A a n valeurs propres réelles (comptées avec multiplicité) $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ avec $\mu_0 = k$.

3. Montrer que $A_1^2 = A_2 + k \cdot I_n$ puis que pour tout entier $r \geq 2$,

$$A_1 A_r = A_r A_1 = A_{r+1} + (k-1)A_{r-1}.$$

4. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{0 \leq r \leq m/2} A_{m-2r} = (k-1)^{m/2} U_m \left(\frac{A}{2\sqrt{k-1}} \right).$$

5. Déduire de la question précédente que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{0 \leq r \leq m/2} (A_{m-2r})_{ii} = (k-1)^{m/2} \sum_{j=0}^{n-1} U_m \left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}} \right).$$

6. Posons $X_m(x) = U_m(x/2)$. Montrer que pour $k \leq l$,

$$X_k X_l = \sum_{m=0}^{k} X_{k+l-m}.$$

7. Déterminer toutes les racines de X_m. Notons α_m la plus grande d'entre elles. Montrer que

$$\frac{X_m(x)}{x - \alpha_m} = \sum_{i=0}^{m-1} X_{m-1-i}(\alpha_m) \cdot X_i(x).$$

8. Posons $Y_m(x) = \frac{X_m(x)^2}{x - \alpha_m}$. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe des réels **positifs** $y_0, \ldots, y_{2m-1}$ tels que

$$Y_m = \sum_{i=0}^{2m-1} y_i X_i.$$

Deuxième partie On note $M^1(I)$ l'ensemble des formes linéaires $\nu : C^0_{\text{pm}}(I) \to \mathbb{R}$ telles que

- si $f \in C^0_{\text{pm}}(I)$ est positive alors $\nu(f) \geq 0$;
- $\nu(\mathbf{1}_I) = 1$.

On munit $M^1(I)$ de la *topologie faible* où $\nu_i \to \nu$ si et seulement si $\nu_i(f) \to \nu(f)$ pour toute fonction $f \in C^0_{\text{pm}}(I)$. On admettra la compacité de l'espace topologique $M^1(I)$.

1. Fixons deux réels $\varepsilon > 0$ et $L \geq 2$. Soit $\nu \in M^1([-L, L])$ telle que

   (2) $$(\forall m \in \mathbb{N})\ \nu(X_m) \geq 0.$$

   Nous cherchons à montrer qu'alors $\nu(\mathbf{1}_{[2-\varepsilon,L]}) > 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\nu(\mathbf{1}_{[2-\varepsilon,L]}) = 0$.

   (a) Montrer que m suffisamment grand,
   $$\nu(Y_m) \leq 0.$$

   (b) D'un autre côté, déduire de la question 8 de la première partie que
   $$\nu(Y_m) \geq 0.$$

   (c) Conclure par l'absurde que $\nu(\mathbf{1}_{[2-\varepsilon,L]}) > 0$.

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $L \geq 2$ deux nombres réels comme dans la question précédente. Et soit f la fonction continue sur $[-L, L]$ définie par

   $$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 - \varepsilon, \\ 1 & \text{si } x \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{2}{\varepsilon}(x - 2 + \varepsilon) & \text{si } 2 - \varepsilon \leq x \leq 2 - \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

   Déduire de la question précédente qu'il existe une constante $C = C(\varepsilon, L) > 0$ telle que pour toute $\nu \in M^1([-L, L])$ vérifiant (2), on a $\nu(f) \geq C$.

3. Fixons dorénavant $L = \frac{k}{\sqrt{k-1}} \geq 2$ et $\nu \in M^1([-L, L])$ donnée par

   $$f \in C^0_{\text{pm}}([-L, L]) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{\mu_j}{\sqrt{k-1}}\right).$$

(a) Déduire de la question 5 de la première partie que ν vérifie (2).

(b) Montrer finalement que **pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\varepsilon, k) > 0$ (indépendante de n) telle que**

$$\#\{\mu_j \;:\; (2-\varepsilon)\sqrt{k-1} \leq \mu_j \leq k\} \geq C \cdot n.$$

EXERCICE 2.

Soit k un corps (le candidat peut éventuellement supposer que k est le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes). Soit V un k–espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée $\phi : V \times V \to k$, c'est-à-dire une application bilinéaire ϕ satisfaisant $\phi(v, v) = 0$ pour tout $v \in V$.

Si $W \subset V$ est un k–sous-espace vectoriel, on définit le sous-espace orthogonal

$$W^{\perp} = \Big\{ v \in V \mid \phi(v, w) = 0 \ \forall w \in W \Big\}.$$

On dit que W est totalement isotrope si $W \subset W^{\perp}$. On dit que W est non dégénéré si $W \cap W^{\perp} = 0$. On suppose en outre que ϕ est non dégénérée, c'est-à-dire que V est non dégénéré.

1. On suppose (uniquement pour cette première question) que $\dim_k(V) = 2$. Montrer que le déterminant $\det : V \times V \to k$, $(v_1, v_2) \mapsto \det(v_1, v_2)$ est une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

2. Soit $W \subset V$ un k-sous-espace vectoriel non dégénéré de V. Montrer que $V = W \oplus W^{\perp}$.

   Un endomorphisme $P : V \to V$ est *hamiltonien-alterné* pour ϕ si $(v, w) \mapsto \phi(Pv, w)$ est aussi alternée. Soit P un tel endomorphisme.

3. Soit $v \in V$. On note $k[P].v$ le sous-espace cyclique de V engendré par $v, Pv, P^2v, \cdots$. On note $d_v = \dim_k(k[P].v)$.

   (a) Montrer que $k[P].v$ est totalement isotrope.

   (b) Montrer qu'il existe $w \in V$ tel que

      i. $0 = \phi(v, w) = \phi(P.v, w) = \cdots = \phi(P^{d_v - 2}.v, w) = 0$;

      ii. $\phi(P^{d_v - 1}.v, w) = 1$.

   (c) Montrer que $k[P].v \cap k[P].w = 0$ et que le sous-espace $k[P].v + k[P].w$ est non dégénéré.

   (d) Montrer les polynômes minimaux de P sur $k[P].v$ et $k[P].w$ sont identiques.

4. Montrer que V est la somme directe orthogonale d'espaces P–stables $V_i = k[P].v_i \oplus k[P].w_i$ où pour chaque i les polynômes minimaux de P sur $k[P].v_i$ et $k[P].w_i$ sont identiques.

5. Montrer que V peut être écrit comme une somme directe $V_1 \oplus V_2$ où V_1 et V_2 sont des espaces totalement isotropes pour ϕ et stables par P.

   On dit qu'un endomorphisme $T : V \to V$ est hamiltonien pour ϕ si $(v, w) \mapsto \phi(T.v, w)$ est symétrique, c'est-à-dire si $\phi(T.v, w) = \phi(T.w, v)$ pour tous $v, w \in V$.

6. Montrer que les endomorphismes hamiltonien-alternés pour ϕ sont les carrés des endomorphismes hamiltoniens pour ϕ.

EXERCICE 3.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Rappeler le développement en série entière de
$$\frac{1}{1-z^\alpha}.$$
Quel est son rayon de convergence ?

2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des entiers naturels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation
$$\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_p n_p = n.$$
Montrer que la série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n$$
a pour rayon de convergence 1 et est égale à
$$F(z) = \frac{1}{1-z^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{1-z^{\alpha_p}}.$$

3. Supposons dorénavant $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $z = 1$ est un pôle d'ordre p de la fraction rationnelle F, décrire tous les autres pôles et montrer qu'ils sont de multiplicités $< p$.

4. Déduire de la question précédente que l'on peut écrire la décomposition en éléments simples de F sous la forme
$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + G(z), \quad \text{avec } G(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \left(\frac{a_{1,\omega}}{\omega - 1} + \ldots + \frac{a_{p-1,\omega}}{(\omega - z)^{p-1}} \right),$$
où Ω est un ensemble fini de racines de l'unité et chaque $a_{k,\omega} \in \mathbb{C}$.

5. Calculer A.

6. Montrer que le coefficient de z^n dans le développement en série entière de G est un $O(n^{p-2})$.

7. En déduire un équivalent de S_n lorsque $n \mapsto +\infty$.
8. Trouver le nombre exact de solutions entières a, b, c de $5a + 3b + 2c = 10000$.

SCIENTIFIC TESTS: MATHEMATICS

We denote by $\mathbb{Z}$ the ring of integral numbers, by $\mathbb{N}$ the set of non-negative integers and by $\mathbb{N}^*$ the set of positive integers. We denote by $\mathbb{R}$ the field of real numbers.

EXERCISE 1.

Notations : We denote by $\mathbb{Z}[X]$ the ring of polynomials in X with coefficients in $\mathbb{Z}$. Given a compact interval I we denote by $C^0_{\rm pm}(I)$ the set of real valued piecewise continuous functions on I. Given a subset $X \subset I$ we finally denote by $\mathbf{1}_X$ the characteristic function of X.

Now let $k \geq 2$ be an integer. In this exercise we study the spectrum of $n \times n$ symmetric matrices $A = (A_{ij})$ with coefficients in $\{0, 1\}$ and which satisfy

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = k. \tag{1}$$

We will also encounter Tchebitcheff polyomials. Given an integer $r \geq 1$ we let A_r be the $n \times n$ symmetric matrix whose coefficients

$$(A_r)_{ij} = \# \left\{ (i_0, \dots, i_r) \ : \ \begin{array}{l} i_0 = i, \ i_r = j, \ i_{l-1} \neq i_{l+1} \ (\forall l \in \{1, \dots, r-1\}) \\ \text{and } A_{i_0 i_1} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{r-1} i_r} \neq 0 \end{array} \right\}.$$

We denote by I_n the $n \times n$ identity matrix.

Part I

1. Prove that there exists a unique sequence of polynomials $U_m \in \mathbb{Z}[X]$ ($m \in \mathbb{N}$) such that

   $$U_m(\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \ (\theta \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{N}).$$

   Prove that it satisfies the following recurrence relation:

   $$U_{m+1}(x) = 2xU_m(x) - U_{m-1}(x).$$

   What is the degree of U_m?

2. Prove that A has n real eigenvalues (with multiplicity) $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ with $\mu_0 = k$.

3. Prove that $A_1^2 = A_2 + k \cdot I_n$ and that for each integer $r \geq 2$,

$$A_1 A_r = A_r A_1 = A_{r+1} + (k-1) A_{r-1}.$$

4. Prove that for any $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{0 \leq r \leq m/2} A_{m-2r} = (k-1)^{m/2} U_m \left(\frac{A}{2\sqrt{k-1}} \right).$$

5. Deduce from the preceding question that for any $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{0 \leq r \leq m/2} (A_{m-2r})_{ii} = (k-1)^{m/2} \sum_{j=0}^{n-1} U_m \left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}} \right).$$

6. Let $X_m(x) = U_m(x/2)$. Prove that for $k \leq l$,

$$X_k X_l = \sum_{m=0}^{k} X_{k+l-m}.$$

7. Find all roots of X_m. Let α_m be the largest one. Prove that

$$\frac{X_m(x)}{x - \alpha_m} = \sum_{i=0}^{m-1} X_{m-1-i}(\alpha_m) \cdot X_i(x).$$

8. Let $Y_m(x) = \frac{X_m(x)^2}{x - \alpha_m}$. Deduce from the last two questions that there exist **positive** real numbers $y_0, \ldots, y_{2m-1}$ such that

$$Y_m = \sum_{i=0}^{2m-1} y_i X_i.$$

Part II Let $M^1(I)$ be the set of linear forms $\nu : C^0_{\mathrm{pm}}(I) \to \mathbb{R}$ such that

- if $f \in C^0_{\mathrm{pm}}(I)$ is non-negative then $\nu(f) \geq 0$;
- $\nu(\mathbf{1}_I) = 1$.

We endow $M^1(I)$ with the *weak topology* where $\nu_i \to \nu$ if and only if $\nu_i(f) \to \nu(f)$ for any $f \in C^0_{\mathrm{pm}}(I)$. We will admit that the topological space $M^1(I)$ is compact.

1. Let $\varepsilon > 0$ and $L \geq 2$ be two real numbers. Let $\nu \in M^1([-L, L])$ be such that

   $$(\forall m \in \mathbb{N})\ \nu(X_m) \geq 0. \tag{2}$$

   Assume by contradiction that $\nu(\mathbf{1}_{[2-\varepsilon, L]}) = 0$.

   (a) Prove that for m large enough,

   $$\nu(Y_m) \leq 0.$$

   (b) On the other hand, deduce from question I.8 that

   $$\nu(Y_m) \geq 0.$$

   (c) Conclude by contradiction that $\nu(\mathbf{1}_{[2-\varepsilon, L]})$ must be positive.

2. Let $\varepsilon > 0$ and $L \geq 2$ be two real numbers as in the last question. And let f be the continuous function on $[-L, L]$ defined by

   $$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 2 - \varepsilon, \\ 1 & \text{if } x \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{2}{\varepsilon}(x - 2 + \varepsilon) & \text{if } 2 - \varepsilon \leq x \leq 2 - \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

   Deduce from the last question that there exists some positive constant $C = C(\varepsilon, L)$ such that for any $\nu \in M^1([-L, L])$ satisfying (2), we have $\nu(f) \geq C$.

3. Let now $L = \frac{k}{\sqrt{k-1}} \geq 2$ and $\nu \in M^1([-L, L])$ be given by

   $$f \in C^0_{\mathrm{pm}}([-L, L]) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{\mu_j}{\sqrt{k-1}}\right).$$

(a) Deduce from question I.5 that ν satisfies (2).

(b) Finally prove that **for any real $\varepsilon > 0$, there exists a positive constant $C = C(\varepsilon, k)$ (not depending on n) such that**

$$\#\{\mu_j \ : \ (2-\varepsilon)\sqrt{k-1} \leq \mu_j \leq k\} \geq C \cdot n.$$

EXERCISE 2.

Let k be a field (the candidate is allowed to assume for simplicity that k is the field of real numbers or complex numbers). Let V be a finite dimensional vector space over k. We are given an alternating bilinear form $\phi : V \times V \to k$, i.e. a bilinear map ϕ satisfying $\phi(v, v) = 0$ for all $v \in V$. If $W \subset V$ is a k–subspace, we denote by

$$W^{\perp} = \Big\{ v \in V \mid \phi(v, w) = 0 \ \forall w \in W \Big\}$$

the orthogonal subspace of W. We say that W is totally isotropic if $W \subset W^{\perp}$. We say that W is non-degenerate if $W \cap W^{\perp} = 0$. We assume that ϕ is non-degenerate, namely that V is non-degenerate.

1. Assume (only in this first question) that $\dim_k(V) = 2$. Show that $\det : V \times V \to k$, $(v_1, v_2) \mapsto \det(v_1, v_2)$ is a non-degenerate alternating form.

2. Let $W \subset V$ be a non-degenerate k–subspace of V. Show that $V = W \oplus W^{\perp}$.

   A linear mapping $P : V \to V$ is *alternating-Hamiltonian* for ϕ if $(v, w) \mapsto \phi(Pv, w)$ is also alternating. Let P be an alternating-Hamiltonian linear mapping for ϕ.

3. Let $v \in V$ and denote by $k[P].v$ the cyclic subspace of V spanned by $v, Pv, P^2 v, \cdots$. Put $d_v = \dim_k(k[P].v)$.
   (a) Show that $k[P].v$ is totally isotropic.
   (b) Show that there exists $w \in V$ such that
      i. $0 = \phi(v, w) = \phi(P.v, w) = \cdots = \phi(P^{d_v - 2}.v, w) = 0$;
      ii. $\phi(P^{d_v - 1}.v, w) = 1$.
   (c) Show that $k[P].v \cap k[P].w = 0$ and that $k[P].v \oplus k[P].w$ is a non degenerate subspace of V.
   (d) Show that the minimal polynomials of P on $k[P].v$ and $k[P].w$ are the same.

4. Show that V is an orthogonal direct sum of P–stable subspaces $V_i = k[P].v_i \oplus k[P].w_i$ where for each i the minimal polynomials of P on $k[P].v_i$ and $k[P].w_i$ are the same.

5. Show that V can be written as a direct sum $V_1 \oplus V_2$ where V_1 and V_2 are totally isotropic subspaces for ϕ and mapped into themselves by P.

   We call a endomorphism $T : V \to V$ Hamiltonian for ϕ if $(v, w) \mapsto \phi(T.v, w)$ is symmetric; that is $\phi(T.v, w) = \phi(T.w, v)$ for all $v, w \in V$.

6. Show that the alternating Hamiltonian mappings for ϕ are the squares of Hamiltonian mappings for ϕ.

EXERCISE 3.

1. Let $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Recall the power series expansion of
$$\frac{1}{1-z^\alpha}.$$
What is its radius of convergence ?

2. Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ be non-negative integers. Given any non-negative integer n we let S_n be the number of p-tuples of non-negative integers $(n_1, \ldots, n_p)$ such that
$$\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_p n_p = n.$$
Prove that the power series
$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n$$
has radius convergence 1 and that its sum is equal to
$$F(z) = \frac{1}{1-z^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{1-z^{\alpha_p}}.$$

3. From now on we assume that $\gcd(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = 1$. Prove that $z = 1$ is a pole of order p of the rational fraction F, describe all other poles and show that their multiplicities are $< p$.

4. Deduce from the last question that
$$F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + G(z), \quad \text{with } G(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \left(\frac{a_{1,\omega}}{\omega - 1} + \ldots + \frac{a_{p-1,\omega}}{(\omega - z)^{p-1}} \right),$$
where Ω is a finite set of roots of unity and each $a_{k,\omega} \in \mathbb{C}$.

5. Compute A.

6. Prove that the coefficient of z^n in the power series expansion of G is bounded from above by a constant times n^{p-2}.

7. Find an equivalent of S_n as $n \to +\infty$.

8. Compute the exact number of 3-tuples of non-negative integers (a, b, c) such that $5a + 3b + 2c = 10000$.
