Sélection Internationale 2009
Epreuve de Mathématiques

Durée: 4 heures.

Exercice 1: Les ensembles de convergence absolue

N.B. Dans tout l'exercice, nous utilisons la notation $\sum$ *pour* $\sum_{n=0}^{+\infty}$.

Considérons une série trigonométrique réelle $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$, avec $\rho_n \geq 0$ et $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nous dirons qu'*elle converge absolument* au point x si la série $\sum \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)|$ converge au point x.

Définition. Soit $E \subset \mathbb{R}$. E *est un ensemble de convergence absolue* s'il existe une série $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ convergeant absolument en tout point x de E, et telle que $\sum \rho_n = +\infty$.

Partie 1

1. Soit E un ensemble de convergence absolue, et $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ comme dans la définition. Montrer que
$$E_N := \left\{ x \in E, \quad \sum \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| \leq N \right\}, \qquad N \geq 1,$$
est une partie fermée de $\mathbb{R}$, et que $E = \bigcup_{N=1}^{+\infty} E_N$.

2. Montrer que quelque soit $N \geq 1$, E_N ne contient aucun intervalle ouvert non-vide (on pourra utiliser la série $\sum \rho_n \cos^2(nx - \alpha_n)$).

3. Soient k nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, et un entier positif ω. Montrer qu'il existe un entier q, $1 \leq q \leq \omega^k$, et des entiers $p_1, \ldots, p_k$ pour lesquels
$$|q\frac{\alpha_j}{\pi} - p_j| \leq \frac{1}{\omega}, \quad j = 1, \ldots, k$$
(on pourra utiliser le principe des tiroirs).

4. En utilisant la question précédente, montrer que tout ensemble dénombrable est un ensemble de convergence absolue.

Partie 2

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Nous dirons que E *est de type (CA)* s'il existe une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\rho_n \geq 0$, telle que $\sum \rho_n = +\infty$ et $\sum \rho_n |\sin(nx)| < +\infty$ pour tout $x \in E$. Le but de cette partie est de montrer qu'un ensemble de convergence absolue est de type (CA).

1. Soit E un ensemble de convergence absolue, et $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ comme dans la définition. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de convergence absolue pour cette série. Montrer que le translaté de E par $-x_0$ est de type (CA).
2. Soit E du type (CA), $\sum \rho_n = +\infty$ et $\sum \rho_n |\sin(nx)| < +\infty$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe une suite $\omega(n)$, croissante, telle que
$$\sum \frac{\rho_n}{\omega(n)} = +\infty, \quad \sum \frac{\rho_n}{\omega(n)^2} < +\infty.$$
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'union de E et de $\{x_0\}$ est du type (CA).
4. Déduire des questions précédentes que tout ensemble de convergence absolue est de type (CA).
5. Montrer que si E est un ensemble de convergence absolue, et F un ensemble fini, $E \cup F$ est un ensemble de convergence absolue.

Partie 3

N.B. On admet dans cette partie que tout ensemble de convergence absolue est d'intérieur vide, autrement dit qu'il ne contient aucun intervalle ouvert non-vide.

Un ensemble de réels B sera dit *base* si tout réel positif x peut être mis sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de points de B:

$$x = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m,$$

m fini, dépendant de x.

1. Montrer qu'une base ne peut pas être un ensemble de convergence absolue.
2. On note K_3 l'ensemble des x de $[0, 1]$ qui admettent le développement
$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{3^k}, \quad \varepsilon_k \in \{0, 2\}.$$
Montrer qu'il ne s'agit pas d'un ensemble de convergence absolue.
3. Soit E l'ensemble des réels x qui s'écrivent
$$x = 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^{k^2}}, \quad \varepsilon_k \in \{0, 1\}.$$
Montrer que E est un ensemble de convergence absolue.

4. Soit $\sum a_n$ une série positive divergente à termes décroissants et tendant vers zéro. Montrer que $\sum a_n \cos(nx)$ n'a aucun point de convergence absolue et $\sum a_n |\sin(nx)|$ ne converge qu'en $x = 0$ (modulo π).

5. Déduire de la question précédente que: si $\rho_n > 0$ décroît et $\sum \rho_n = +\infty$, la série $\sum \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ ne peut avoir plus d'un point de convergence absolue (modulo π).

Exercice 2: Mesure de Mahler d'un polynôme

Étant donné un polynôme non nul

$$P = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0 = a_d \prod_{i=1}^{d} (x - \alpha_i) \in \mathbb{C}[X]$$

on note $M(P) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$.

1. Montrer que
$$|a_0| + \ldots + |a_d| \leq \sum_{m=0}^{d} \sum_{\{i_1,\ldots,i_m\}} |a_d \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_m}|,$$
où la somme porte sur tout les ensembles possibles d'indices.

2. En déduire que
$$2^{-d} \left(\sum_{i=0}^{d} |a_i| \right) \leq M(P).$$

3. Exhiber un polynôme qui montre que l'inégalité ci-dessus est optimale.

4. Supposons P unitaire, autrement dit $a_d = 1$. Montrer que
$$\prod_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j| \leq 2^{d(d-1)} M(P)^{2d-2}.$$
Indication : ordonner les zéros de P de telle manière que $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots \geq |\alpha_d|$, puis appliquer l'inégalité triangulaire à la racine carrée du membre de gauche.

5. Soient $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 1$, et $y_1, \ldots, y_d > 1$ des nombres réels. Montrer que
$$(y_1 - 1) \ldots (y_d - 1) \leq \Big((y_1 \ldots y_d)^{1/d} - 1 \Big)^d.$$

6. Supposons maintenant $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, $P(-1)P(1) \neq 0$, $P(0) = \pm 1$ et que tous ses zéros sont réels.

   (a) Soit $E = \prod_{i=1}^{d} |\alpha_i^2 - 1|$. Montrer que $E \geq 1$ et que
   $$E = \frac{1}{M(P)^2} \prod_{|\alpha_i|<1} |\alpha_i^{-2} - 1| \times \prod_{|\alpha_i>1} |\alpha_i^2 - 1|.$$

(b) Montrer que

$$E \leq \left(M(P)^{2/d} - M(P)^{-2/d}\right)^d.$$

(c) Conclure que

$$M(P) \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{d/2}. \tag{0.1}$$

Exercice 3: Valeurs singulières d'une matrice

Soit A une matrice carrée réelle de taille n. On appelle *valeurs singulières* de A les nombres réels $\sigma_i = \sqrt{\mu_i}$, $i = 1, \ldots, n$, où les μ_i sont les valeurs propres de ${}^tAA$. On supposera dorénavant $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$.

1. Montrer qu'il existe des matrices orthogonales $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

2. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, avec $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Montrer que pour tout $m \leq n$,

$$|\lambda_1 \ldots \lambda_m| \leq \sigma_1 \ldots \sigma_m.$$

3. Soit $U = (u_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs tels que pour tout k, $\sum_i u_{i,k} = \sum_j u_{k,j} = 1$. Montrer qu'étant donné des nombres réels $x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ et $y_1 \geq \ldots \geq y_n \geq 0$, on a :

$$\sum_{r,s} u_{r,s} x_r y_s \leq \sum_r x_r y_r.$$

Indication : écrire $x_r = \sum_{i=r}^n \xi_i$ *et* $y_r = \sum_{i=r}^n \eta_i$ *avec* $\xi_i, \eta_i \geq 0$.

4. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ de valeurs singulières $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_n$. Montrer que

$$|\mathrm{tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \tau_i.$$

Indication : penser à l'inégalité $|uv| \leq \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2)$.

5. Montrer que les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$$

sont $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, -\sigma_1, \ldots, -\sigma_n$.