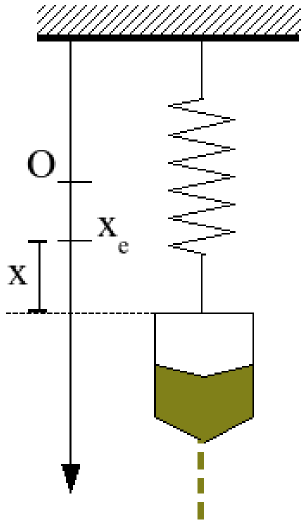
Epreuve de culture scientifique

Physique

Exercice 1

Exercice de mécanique (recommandé pour les candidats ayant Physique en matière secondaire)

On considère la situation suivante d'un sablier suspendu à un ressort :



À l'instant $t = 0$ on lache le pendule ainsi formé sans vitesse d'une position x_0 différente de sa position d'équilibre x_e et on ouvre l'ouverture du sablier.

Q1. On suppose que le mouvement du sablier perturbe peu la chute du sable. Cette dernière est donc la même qu'au repos. $m(t)$ est la masse du sablier à l'instant t. Quelle hypothèse peut-on faire sur le débit massique de sable $D = \frac{dm}{dt}$? Pouvez vous proposer une expérience qui testerait cette hypothèse ?

Q2. On appelle m_0 la masse initiale du sablier. On néglige en revanche la masse du sablier vide. On définit un axe vertical Ox, la position de l'origine O correspond au bout du ressort à vide. On définit k la raideur du ressort. Que vaut la position d'équilibre du sablier $x_e(t)$ à l'instant t en l'absence d'oscillations ?

Q3. Soit q la vitesse de sortie du sable par rapport à l'ouverture du sablier. On définit $x(t)$ comme étant l'écart du sablier par rapport à sa position d'équilibre. Que vaut la variation de quantité de mouvement $\frac{dp}{dt}$ du sablier entre les instants t et $t + dt$? On exprimera cette dernière en fonction des quantités précédemment introduites ou de leur dérivées.

Q4. Justifier que l'on peut faire l'approximation :

$$\frac{dp}{dt} \approx m(t)\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Q5. En appliquant le principe fondamental de la mécanique et en justifiant les approximations qui vous semblent nécéssaires montrer que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{1}$$

où α est le coefficient de frottement visqueux de l'air sur le sablier.

Il n'est pas facile d'intégrer l'équation différentielle (1) en raison du terme dépendant du temps $m(t)$. Afin de simplifier le problème on va supposer que l'on peut négliger le déplacement de la position d'équilibre $x_e(t)$. On va faire en outre l'hypothèse qu'à chaque instant on a un mouvement sinusoïdal :

$$x(t) = A(t)\sin[\omega(t)t + \phi(t)],$$

avec $\omega(t) = \sqrt{\frac{k}{m(t)}}$ et les quantités $A(t)$ et $\phi(t)$ variant lentement dans le temps.

Q6. Exprimer l'énergie potentielle $E_p(t)$ du système à l'instant t en fonction de $x(t)$. Montrer que l'on a :

$$\frac{dE_p}{dt} = -\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - m(t)\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

Q7. Calculer la variation d'énergie cinétique $\frac{dE_c}{dt}$ en fonction de $m(t)$, D et des dérivées de $x(t)$.

Q8. Montrer que l'énergie mécanique totale du sablier $E_m(t)$ vérifie :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\left(\alpha + \frac{D}{2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{2}$$

Q9. On s'intéresse à une période unique du pendule autour de l'instant t. Que vaut l'énergie mécanique totale du système en fonction de $A(t)$?

Q10. Evaluer le terme de perte d'énergie, membre de droite de l'équation (2), sur une période en fonction de $A(t)$.

Q11. En déduire une équation différentielle sur $A(t)$.

Q12. Montrer que la solution de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$A(t) = A(0)\left(1 - \frac{Dt}{m_0}\right)^{\frac{\alpha}{2D}+\frac{1}{4}}.$$

Q13. Décrire l'allure de la fonction $A(t)$ en fonction des valeurs relatives des paramètres α et D.

Q14. Montrer que dans le régime où les frottements visqueux dominent les pertes de masse, on retrouve les résultats habituels du pendule oscillant amorti.

Epreuve de culture scientifique

Physique

Exercice 2

Exercice d'électrostatique

Cet exercice est composé de trois parties. Elles sont reliées du point de vue thématique, mais il est néanmoins possible de traiter les deux premières de façon indépendante. La troisième partie consiste en un résumé du phénomène physique étudié dans les deux premières parties.

1.) Un modèle pour l'atome d'hydrogène

Dans cette partie de l'exercice nous nous proposons de trouver la distribution de charge correspondant au potentiel

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{a}} \tag{1}$$

1.a) Quel est le champ électrique associé ? Exprimer le flux du champ électrique à travers une sphère de rayon r.
1.b) Prendre les limites r vers zéro et vers l'infini de l'expression du flux. Qu'est-ce qu'on en conclut ?
1.c) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ qui est à l'origine de ce flux.
1.d) Le potentiel modélise de manière quantique le champ électrique d'un proton en présence d'un électron (atome d'hydrogène). Quelle est la densité de probabilité de présence de l'électron (définie par $p(r) = \frac{dq}{dr}$ où dq est la charge présente à l'intérieur de la couronne sphérique (r,r+dr)) ? Que présente a pour la probabilité de présence de l'électron ? Donner un ordre de grandeur pour a.
1.e) Justifier l'expression *potentiel coulombien avec écran* associée au potentiel ci-dessus.
1.f) Proposer une modification de la théorie pour décrire l'atome d'hélium.
1.g) Un modèle équivalent existe-t-il en mécanique gravitationnelle ?

2.) L'écrantage

Dans cette partie de l'exercice nous étudions un modèle d'un plasma. Nous considérons N particules de charge négative $-q$ dans une boîte de volume V. On prendra V et N grands et on ne se souciera pas d'effets de bord éventuels ni de la granularité des particules. Nous supposons en outre la présence d'une charge positive uniforme Nq/V partout dans la boîte.
2.a) Quel est le rôle de la charge positive uniforme ? Donner la densité de charge totale $\rho(\mathbf{r})$ à chaque point dans l'espace.
2.b) On introduit maintenant une charge ponctuelle $Q > 0$ à l'origine, et on se propose de calculer les variations de la densité de charge et du potentiel induites par Q.
(i) En utilisant la distribution de probabilité de Boltzmann et une approximation de champ moyen, donner la densité en fonction du potentiel électrique, lorsque le plasma se trouve à l'équilibre à la température T. (L'approximation de champ moyen revient à supposer que chaque particule "voit" le potentiel sans le perturber.)
(ii) Trouver une équation différentielle pour le potentiel.
(iii) A quelle condition est-ce qu'on peut linéariser l'équation ?

(iv) En supposant cette condition satisfaite, résoudre l'équation linéarisée. On définira une longueur caractéristique qu'on interprétera physiquement.

3.) Synthèse

On résumera en quelques phrases l'essentiel du phènomène de l'écrantage, en se basant sur les résultats des parties 1.) et 2.).

Epreuve de culture scientifique

Physique

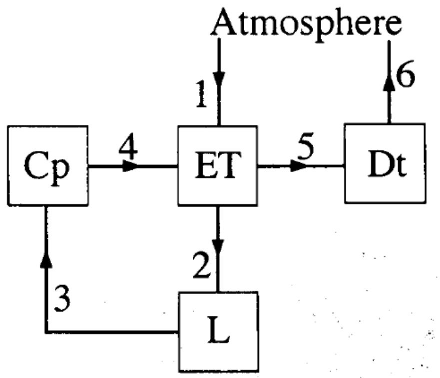
Exercice 3

Thermodynamique

Cet exercice est consitué de deux parties complètement indépendantes.

1.) Une pompe à chaleur

L'installation schématisée sur la figure ci-dessous est une pompe à chaleur ditherme, fonctionant entre une source chaude, le local à chauffer, de température $T_C = 293K$ et une source froide, l'atmosphère, de température $T_F = 268K$.



Une masse d'air de m = 1kg est prélevée dans l'atmosphère à la pression p_1 = 1 bar et à la température $T_1 = T_F = 268K$. Elle traverse ensuite un échangeur thermique calorifugé (ET) où elle croise une autre circulation d'air. Dans ET, sa température augmente de T_1 à T_2 à pression constante. Après ET, l'air traverse le local à chauffer (L) dans lequel sa température passe de T_2 à $T_3 = T_C = 293K$ et sa pression ne varie pas. Il est alors comprimé réversiblement dans un compresseur calorifugé (Cp). À la sortie de Cp, la pression est $P_4 = 2bar$, et la température est T_4. Puis l'air traverse à nouveau ET dans lequel sa température passe de T_4 à T_5 et sa pression reste constante. Enfin, il subit une détente isotherme dans un détenteur (Dt) dans le quel sa pression varie de P_5 à P_1 et est rejeté dans l'atmosphère.

L'air est modelisé par un gaz parfait de masse molaire $M = 29gr/mol$ et de coefficient isentropique $\gamma = 1,4$. L'installation fonctionne en régime peramnent avec un débit massique identique dans tous les éléments de l'installation.

1.a) Tracer le cycle de la masse d'air considérée dans un diagramme $P - V$, dit de Clapeyron.

1.b) On suppose que les échanges thermiques entre les circulations d'air $1 \rightarrow 2$ et $4 \rightarrow 5$ dans ET sont réversibles. En applicant les premier et deuxième principes de la thermodynamique montrer que :

$$T_2 = T_4 \quad \& \quad T_5 = T_1.$$

1.c) Calculer la température T_4.

1.d) Comparer les quantités de chaleur reçues par l'air lors des transformations $1 \rightarrow 2$ et $4 \rightarrow 5$.

1.e) Calculer le transfert thermique Q_C reçu par l'air à la traversée du local et le travail W_{Cp} reçu par l'air dans le compresseur. En déduire l'efficacité e de la pompe à chaleur.

1.f) Quelle est l'efficacité idéale e_c d'une pompe à chaleur de Carnot, fonctionnant entre les mêmes sources de chaleur ? Commenter.

2.) Soit une colonne de gaz semi-infinie ($z > 0$), les bords de la colonne imposent une température constante T. La colonne est sous l'influence du champ de pesanteur uniforme $-g\hat{z}$. La densité du gaz en $z = 0$ est ρ_0. On introduit un objet de masse M et volume V :

2.a) déterminer la hauteur d'équilibre de l'objet.

2.b) Calculer la fréquence d'oscillation de l'objet autour de sa position d'équilibre.

2.c) Si on change les bords de la colonne par un isolant calorifugé, quelle est la nouvelle hauteur d'équilibre de l'objet ?

2.d) Question : Quelle est la hauteur de l'atmosphère ?