Concours ENS-International Sciences 2009

RAPPORT SUR L'EPREUVE ECRITE DE COMMENTAIRE DE DOCUMENT

PROBLEMES SOLUBLES ET PROBLEMES INSOLUBLES D'Alan Madison TURING

Le texte choisi pour cette session 2009 est signé par le mathématicien britannique Alan Mathison TURING (23 juin 1912 – 7 juin 1954), auteur de l'article fondateur de la science informatique qui allait donner le coup d'envoi à la création de l'ordinateur programmable.

Dans son remarquable article « *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* » (1936), il répond à un problème posé par Hilbert, à savoir celui de la décision (*Entscheidung*) dans les théories axiomatiques, qui demande s'il est possible de trouver une méthode effectivement calculable qui affirme si, *oui* ou *non*, une proposition est démontrable. Pour montrer que cela n'est pas possible, il faut caractériser ce qu'est un procédé effectivement calculable.

Turing le fait en introduisant les *machines de Turing*. Dans le cours de son raisonnement, il démontre que le problème de l'arrêt d'une machine de Turing ne peut être résolu par algorithme : il n'est pas possible de décider avec un algorithme (c'est-à-dire avec une machine de Turing) si une machine de Turing donnée s'arrêtera. Bien que sa preuve fût publiée après celle de Alonzo CHURCH, le travail de Turing est plus accessible et intuitif. Il est aussi complètement nouveau dans sa présentation du concept de « machine universelle (de Turing) », avec l'idée qu'une telle machine puisse accomplir les tâches de n'importe quelle autre machine. L'article présente également la notion de *nombre réel calculable*. Il déduit de l'indécidabilité du problème de l'arrêt que l'on peut définir des nombres réels qui ne sont pas calculables.

Durant la Seconde Guerre mondiale, il dirigea les recherches sur les codes secrets générés par la machine *Enigma* utilisée par les nazis. Après la guerre, il a travaillé sur l'un des tous premiers ordinateurs, puis il a contribué de manière provocatrice au débat déjà houleux à cette époque sur la capacité des machines à penser en établissant le *test de Turing*.

En 1952, Turing s'est intéressé à une autre branche des mathématiques : l'analyse et, à partir de l'équation de réaction-diffusion, a élaboré un *modèle biomathématique de la morphogenèse*, tant chez l'animal que chez le végétal. Il fait paraître un article, « *The chemical basis of morphogenesis* » (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, août 1952), où il propose trois modèles de formes ou *structures de Turing* (*Turing patterns*).

L'homosexualité de Turing lui valut d'être persécuté et brisa sa carrière. En 1952, son compagnon aide un complice à cambrioler la maison de Turing, qui porte plainte auprès de la police. L'enquête de police finit par l'accuser d'« indécence manifeste et de perversion sexuelle » (d'après la loi britannique sur la sodomie). Il décide d'assumer son orientation et ne présente pas de défense, ce qui le fait inculper.

S'ensuit un procès très médiatisé, où lui est donné le choix entre l'incarcération et une castration chimique, réduisant sa libido. Il choisit ce dernier, d'une durée d'un an, avec des effets secondaires comme le grossissement de ses seins. Alors qu'il avait été consacré, en 1951, en devenant membre de la *Royal Society*, à partir de 1952, il sera écarté des plus grands projets scientifiques.

En 1954, il meurt d'empoisonnement en mangeant une pomme contenant du cyanure. Cette mort serait intentionnelle et fut présentée comme telle. Sa mère, toutefois, écarta la thèse du suicide pour soutenir celle de l'accident. Elle affirmait vigoureusement que l'ingestion du poison était accidentelle en raison de la propension de son fils à entreposer des produits chimiques de laboratoire sans aucune précaution.

L'extrait tiré de *Solvable and Unsolvable Problems* (paru dans *Science News* 31, 1954, pp. 1, 3-4) commence par annoncer [§. 1] le contenu de la thèse que Turing entend démontrer : il est en fait impossible de trouver un test systématique qui dirait si un problème est soluble ou non. On peut remarquer que la thèse qu'entend prouver l'auteur est *formulée de façon négative* : elle décrit *l'impossibilité* de parvenir à un résultat. Les mathématiques classiques cherchent généralement à démontrer que tel objet possède (ou ne possède pas) telle propriété ; or, la thèse de Turing est bien plus radicale en affirmant qu'il est *logiquement impossible* de construire le « test de solubilité ». A priori, il est difficile de voir ce qu empêcherait d'effectuer une telle construction : il se pourrait tout simplement que nos connaissances soient *limitées* et que nous soyons en mesure de découvrir, à l'avenir, les moyens de construire un tel test de solubilité. Or, Turing exclut d'emblée cette possibilité et prétend que son résultat est *indépendant de l'état de nos connaissances*, ce qui ne devrait pas manquer de surprendre le lecteur.

On pourrait parler ici de *thèse* avancée par Turing quant à l'inexistence de test systématique permettant de dire, pour tout *puzzle* qui se présenterait, si ce *puzzle* possède ou non une solution. Cela signifie que les termes figurant dans cette thèse ne sont pas définis de façon *mathématique*. Ce qui signifie encore qu'on ne pourra pas établir de « preuve » de cette thèse par de pures déductions logiques. « Preuve » ne devra donc pas être entendu comme une démonstration mathématique classique, mais plutôt comme un raisonnement satisfaisant dès lors qu'on admet les hypothèses de l'auteur et que l'on suit ses déductions.

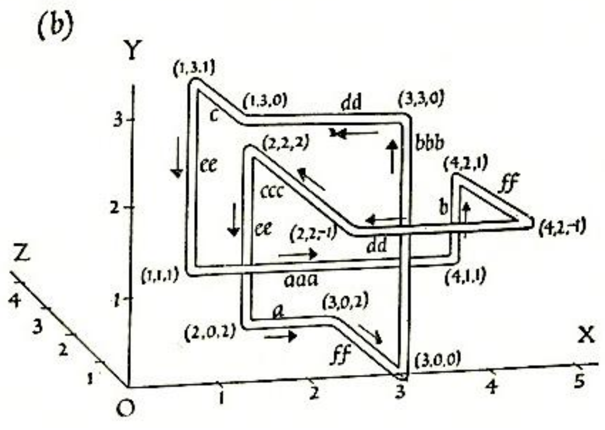
La suite du texte montre comment Turing s'y prend pour affirmer une *impossibilité* qui porte sur *tous* les *puzzles possibles*, et *indépendamment* de tout état des connaissances. Ce qui présuppose que l'auteur va demander au lecteur de procéder à diverses idéalisations qui l'éloigneront de son expérience immédiate de la logique, des mathématiques et de l'informatique.

Le premier niveau d'abstraction tient au fait que la procédure systématique recherchée doit simplement dire si *oui* ou *non* il existe une solution, *indépendamment de la quantité de calculs à effectuer* ou de l'*obtention effective d'une solution*. On quitte alors le domaine purement opérationnel pour atteindre un niveau plus mathématique. Il s'agit bien d'une « abstraction » car nous exigeons habituellement de quelqu'un qu'il nous donne une solution d'un problème pour considérer que ce problème a été résolu : une réponse du type « oui, il existe une solution » a en général peu de chances de nous satisfaire.

La question précise est celle de savoir s'il existe des problèmes dont le nombre de configurations possibles est infini, car les problèmes dans lesquels le nombre de configurations est fini n'a que peu d'intérêt. Il est clair qu'il suffit de disposer d'une énumération de toutes les configurations possibles pour savoir si un jeu possède ou non une solution. Turing prend ici [§. 2] l'exemple du jeu qui consiste à savoir si l'on peut transformer un nœud en un autre nœud à l'aide de transformations continues, c'est-à-dire sans couper le fil et en supposant que le fil est infiniment élastique[1].Turing suggère alors de trouver un équivalent mathématique du problème. Un nœud est défini comme une courbe dans l'espace qui est fermée sur elle-même : elle possède ainsi une infinité de configurations qui varient continûment. Un nœud est donc construit à l'aide de *deux infinis* : d'une part, il peut être aussi grand qu'on veut ; d'autre part, ses configurations peuvent être aussi proches les unes des autres qu'on le souhaite. Comment dans ce cas peut-on espérer *décrire tout nœud possible* ? Il nous faudrait en effet une infinité de coordonnées, chacune admettant une infinité de valeurs. Étant donné qu'il s'agit de résoudre le problème de l'équivalence des nœuds, nous sommes autorisés à considérer un nœud comme un ensemble de segments dont les directions suivent les trois axes de coordonnées. L'espace est alors *discrétisé* : des deux infinis, nous perdons celui de la continuité des configurations, mais nous conservons en revanche la possibilité d'avoir des nœuds arbitrairement longs. Six lettres suffisent alors pour décrire chaque segment élémentaire du nœud, et l'on peut alors associer à chaque nœud une suite de lettres qui décrit le mouvements du fil dans l'espace.

[1]. Le problème de l'équivalence des nœuds n'a toujours pas été résolu et reste à ce jour un domaine de recherche mathématique de grande fécondité.

À ce nœud de trèfle, les conventions choisies par Turing associent la suite de lettres : *aaabffddccceeaffbbbddcee*.



On a ainsi réduit un nœud à un mot. Les règles de transformations topologiques peuvent alors être définies en termes de transformations sur les lettres. Pour poursuivre le traitement formel de ce *puzzle*, il reste encore à exprimer les transformations que l'on est autorisé à réaliser sur les nœuds par des opérations permises sur les mots correspondants. Or ces opérations prennent la forme de règles de réécriture, de sorte que la formalisation cherchée du *puzzle* des nœuds revient à définir ce que Turing appelle un *puzzle de substitution.* Ainsi, à l'aide de quatre règles qui utilisent des substitutions, ajouts et permutations de lettres, on réussit à exprimer à quelle condition une transformation sur les lettres correspond à une transformation topologique autorisée. Turing semble suggérer que nous pouvons réussir à en faire de même avec tout problème, qu'il soit de nature physique ou logique.

Nous passons à un deuxième niveau d'abstraction en admettant que tout jeu peut être modélisé par une suite arbitrairement longue de symboles, le nombre de symboles différents étant fini. On passe alors à un autre *puzzle* : le « *puzzle* des *substitutions* » [§. 3]. La question qui se pose alors est de savoir, comme précédemment, si l'on peut passer d'une suite de jetons (ou de symboles) à une autre. Tous ces *puzzles* semblent équivalents entre eux du point de vue de l'existence des solutions. Ce qu'il faut pour prouver cette hypothèse, c'est un moyen de transformer un jeu en un autre, de façon à ce que trouver la solution de l'un implique trouver la solution de l'autre. Turing affirme que nous pourrons y parvenir en *divisant* chaque action du jeu en sous-parties élémentaires : ces sous-parties élémentaires se ramènent toujours à *compter*, *copier*, *comparer* et *opérer des substitutions* sur les pièces du jeu. Toute opération est finalement traduisible en une suite d'opérations élémentaires d'un seul type : la *substitution*. Il faut toujours réduire à ces sous-étapes élémentaires qui sont comme un « principe d'économie » pour la pensée et le calcul (« éviter de transporter trop d'information dans sa tête »). Cependant, il apparaît que la procédure systématique *est elle-même un puzzle* et qu'elle se définit, comme tout *puzzle*, par un ensemble de règles et une position de départ.

Il s'avère maintenant [§. 4] qu'il existe un certain type de *puzzles* pour lesquels il n'existe pas de méthode systématique pour savoir s'ils sont solubles ou pas. C'est ce que Turing appelle *problèmes insolubles*, par opposition aux problèmes dont on sait qu'ils admettent ou pas une solution. Pour éviter la confusion de ces « problèmes insolubles » avec les problèmes qui n'admettent pas de solution, l'auteur préconise d'employer le terme « *problèmes de décision* insolubles ». La difficulté à traiter les problèmes de décision surgit lorsqu'on cherche à établir qu'un problème de décision est insoluble, *dans les cas précis où il est insoluble*. Pour établir les résultats d'*insolubilité*, on doit considérer toutes les stratégies possibles et montrer qu'aucune d'elle ne peut aboutir au résultat : comme le nombre de ces stratégies est infini, il s'avère qu'un argument de nature mathématique est nécessaire pour prouver l'insolubilité. Turing rappelle alors que le *théorème de Gödel* de 1931 montrait déjà qu'étant donné un système d'axiomes suffisamment riche pour inclure l'arithmétique, *il n'existe pas de procédure systématique* capable de résoudre toute question mathématique en répondant par *oui* ou par *non*. Turing affirme ainsi que sa *thèse* ne doit pas nous surprendre, bien que son résultat soit totalement indépendant de ce théorème : les règles de formation et de transformation dans un système axiomatique formel sont assimilables aux règles d'un *puzzle*. Philosophiquement parlant, on peut penser ici que ce texte a une portée plus vaste que l'article de Gödel de 1931 : ses conséquences ne se limitent pas à un seul domaine (l'arithmétique), mais portent de façon plus générale, sur les problèmes susceptibles d'être résolus de façon mathématique. Mais ce résultat de Turing *n'*est *pas* cependant une généralisation du résultat de Gödel[2].

Quant au problème lui-même, il remonte bien en deçà des travaux de Gödel, et on pourrait citer, parmi d'autres, Aristote, Cicéron, Albert de Saxe, Guillaume d'Occam, Saint

[2]. « Il convient sans doute de noter que cette proposition [thèse de Turing de 1936] est assez différente des résultats bien connus de Gödel : celui-ci a en effet montré qu'il existe (dans le formalisme des *Principia Mathematica* [de Russell] des propositions *U* telles que ni *U*, ni *~U* ne sont démontrables, d'où il découle qu'il ne peut exister de preuve de la consistance des *Principia Mathematica* à l'intérieur de ce formalisme. Pour ma part, je montrerai qu'il n'existe pas de procédure générale permettant de savoir si une formule *U* est démontrables dans *K* ou, ce qui revient au même, si le système *K* augmenté d'un axiome supplémentaire *~U* est consistant », « On Computable Numbers, with an Application to the *Enstscheidungsproblem* », *Proceedings of the Mathematical Society*, série 2, vol. 42 (1936-1937), p. 230-265.

Thomas d'Aquin, Frege, Russell, tous inventeurs de *puzzles* logiques féconds – sans parler de Hilbert, Kleene, Post ou Church…

On notera en supplément (pour les mathématiciens) que l'une des particularités remarquables de ce texte – paru l'année même de la mort de Turing – est la quasi-évocation du problème des mots de Dehn[3], dont l'insolubilité fut prouvée par Novikov peu après que Turing a écrit ce texte, et cette perche tendue vers l'une des questions du *noeud de trèfle* : la topologie quantique (initiée par Jones) sera plus tard requise pour distinguer ce noeud de son miroir. Ces considérations sur les nœuds, dont la classification occupe encore toute l'attention des mathématiciens, est particulièrement remarquable ici. La recherche d'invariants permettant de déterminer si un nœud peut être obtenu à partir d'un autre (en somme, s'ils sont *le même* nœud) s'est plus particulièrement développée dans les années 80 du siècle dernier, et elle s'insère parfaitement dans les recherches de Turing : lorsqu'on remarque que les deux nœuds (à comparer) diffèrent pour quelque invariant, on peut répondre *négativement* à la question de principe sur la possibilité de la transformation. Ces questions sont encore loin d'être résolues, et l'on ne dispose pas encore d'invariants « complets » dont l'existence, pour deux nœuds donnés, suffirait à conclure que l'on peut transformer l'un dans l'autre[4].

En conclusion, l'approche de Turing présentée dans cet article est inhabituelle du point de vue de la théorie de la calculabilité comme telle. Au lieu de partir des problèmes de décision (*Entscheidungsprobleme*) qui impliquent immédiatement la référence aux procédures effectives, l'auteur se fonde sur la notion de *puzzle* qui renvoie à un ensemble d'inversigations *plus universel,* recouvrant aussi bien des casse-têtes commercialisés que des recherches mathématiques abstraites. Les algorithmes sont dès lors définis comme solutions déterminées des *puzzles*. Sa thèse s'inscrit ainsi dans une analyse générale des procédés d'*investigation* et de *résolution*.

---

[3]. Dehn introduit en 1911 le problème du mot pour les groupes. En 1912, il invente l'algorithme de Dehn et l'utilise dans son travail sur le problème du mot et le problème de conjugaison dans les groupes. En 1914, il démontre que les nœuds de trèfle gauche et droit ne sont pas équivalents.

[4]. Le résultat contemporain le plus proche des considérations de Turing est sans doute celui obtenu par Hemion. Cf. Geoffrey HEMION, *On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds*, Acta Mathematica, Volume 142, Number 1 / juillet 1979, p. 123-155. Voir aussi, Joan S. BIRMAN, *New Points of View in Knot Theory*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 28, Number 2, April 1993, p. 253-287.

Comme l'an dernier, des directives précises et explicites ont été données en début d'épreuve aux candidats :

1) bien prendre soin de lire attentivement le texte à commenter avant de composer (il leur a été accordé, comme l'année dernière, une demi-heure pour d'éventuelles questions en dehors du temps d'épreuve) ;

2) illustrer l'argumentation et la problématique proposées à travers des exemples tirés d'une (ou de plusieurs) discipline(s) scientifique(s) fréquentée(s) par le candidat, cette opération présupposant une explicitation des enjeux théoriques mis en jeu par le texte à commenter (et non, simplement, une analyse « technique », surtout dans le cadre d'un tel sujet dont ce n'était pas l'enjeu).

Les notes obtenues par les candidats se sont étalées de 18 à 2. Sur 27 copies, 24 ont obtenu la moyenne (7 copies entre 2/20 et 13,5/20 ; 17 copies entre 14/20 et 18/20). 2 copies étaient médiocres et 1 copie vraiment nulle (2/20). Ce sont de meilleurs résultats que l'an dernier.

Les meilleures notes ont su dégager la valeur philosophique de ce texte, sans tomber dans les poncifs. Tel candidat a lié des réflexions sur la philosophie brouwerienne, la classification des espaces topologiques, les questions d'expression linguistique, Homotopie et Homologie, notions de transfert (traduction) ; tel autre les « inégalités de Heisenberg », l'approche biologique, la théorie des cristaux ; tel autre encore, la théorie des graphes, le problèmes NP complet, l'approximation et l'Axiome du choix, ou la théorie des nœuds.

Enfin, le parallélisme entre les notes obtenues par les candidats aux épreuves de spécialité et celles obtenues à l'épreuve de « commentaire de texte » reste marquant.

Charles Alunni