Sélection Internationale 2010
Epreuve de Mathématiques

Exercice 1: Quelques résultats sur l'interpolation polynômiale

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $n \in \mathbb{N}$, et $n+1$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dans $[a, b]$, deux à deux distincts, rangés par ordre croissant.

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme p_n de degré $\leq n$ tel que

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

2) On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point $\xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\, \pi_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\xi_x),$$

avec $\pi_{n+1}(t) \;:=\; \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$. En déduire que

$$\sup_{[a,b]} |f - p_n| \;\leq\; \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

3) Soit $R > \frac{b-a}{2}$, et $c := \frac{a+b}{2}$. On suppose (dans cette question uniquement) que f est définie sur $]c - R, c + R[$, et donnée par une série entière centrée en c :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k, \qquad \text{pour tout } \; x \in]c - R, c + R[.$$

Montrer que pour R assez grand, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4) On suppose (dans cette question uniquement) que les points x_i sont uniformément répartis:

$$x_i \;:=\; a + ih, \quad h \;:=\; \frac{b-a}{n}.$$

a) Montrer que: $\sup_{[a,b]} |\pi_{n+1}| \;\leq\; h^{n+1} \max_{s\in[0,n]} |s(s-1)\cdots(s-n)|$

b) En utilisant la formule de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, en déduire: il existe $C > 0$ (indépendant de n) tel que

$$\sup_{[a,b]} |\pi_{n+1}| \;\leq\; C \left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}$$

En déduire une majoration de $\sup_{[a,b]} |f - p_n|$ meilleure que celle donnée à la question 2).

c) Montrer qu'il existe $c > 0$ (indépendant de n) tel que: $\sup_{[a,b]} |\pi_{n+1}| \;\geq\; \frac{c}{n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}$.

5) On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $T_n(t) \;:=\; \cos(n \arccos t)$. Montrer que T_n est un polynôme de degré n, vérifiant la relation de récurrence

$$T_{n+1}(t) \;=\; 2t\, T_n(t) \;-\; T_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que t_n a n racines réelles distinctes $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ dans $[-1, 1]$ que l'on déterminera.

6) On suppose (dans cette question uniquement) que $x_i := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\, y_i$. Montrer que $\sup_{[a,b]} |\pi_{n+1}| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$, et en déduire une majoration de $\sup_{[a,b]} |f - p_n|$ meilleure que celle donnée à la question 2).

7) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leq$ n. Montrer qu'il existe $p \in R_n[X]$ tel que

$$\sup_{[a,b]} |f - p| \; = \; \inf_{q\in\mathbb{R}_n[X]} \sup_{[a,b]} |f - q|$$

Un tel polynôme p sera appelé *polynôme de meilleure approximation* de f.

8) On dit qu'une fonction $g \in C([a, b])$ *équioscille sur* $(k + 1)$ *points de* $[a, b]$ s'il existe des points $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ dans $[a, b]$ tels que

$$\text{Pour tout } \; i = 0, \ldots , k, \quad |g(x_i)| = \sup_{[a,b]} |g|| \quad \text{ et pour tout } \; i = 0, \ldots , k - 1, \; g(x_{i+1}) = -g(x_i).$$

Montrer que si p est un polynôme de meilleure approximation, alors il équioscille sur $n + 2$ points de $[a, b]$.

9) En déduire l'unicité du polynôme de meilleure approximation.

10) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire p de degré $n + 1$ dont la norme uniforme sur $[-1, 1]$ $(\|p\| = \sup_{[-1,1]} |p|)$ est minimale. Déterminer ce polynôme.

Exercice 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Rappelons qu'une forme quadratique (de dimension finie) sur $\mathbb{K}$ est la donnée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie et d'une application $q : V \to \mathbb{K}$ telle que

i) $q(\lambda v) = \lambda^2 v$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in V$;

ii) l'application $\widetilde{q} : V \times V \to \mathbb{K}$ définie par $(x, y) \mapsto \widetilde{q}(x, y) = \dfrac{1}{2}\big(q(x+y)-q(x)-q(y)\big)$ est bilinéaire.

On rappelle que $q \mapsto \widetilde{q}$ est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{K}$ sur les formes bilinéaires symétriques. Dans la suite toutes les formes quadratiques seront supposées *non-dégénérées*, c'est à dire telle que pour tout $v \in V - \{0\}$, il existe $w \in V$ tel que $\widetilde{q}(v, w) \neq 0$. Une *isométrie* entre deux formes quadratiques (V, q), (V', q') est une application linéaire *bijective* $f : V \overset{\cong}{\to} V'$ telle que $q' \circ f = q$.

Pour tous $a_1, \ldots , a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$, on notera $\langle a_1, \ldots , a_n\rangle$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{K}^n$ par la formule $q((x_1, \ldots , x_n)) = a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2$. Enfin on note $\mathcal{Q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des formes quadratiques non-dégénérées de dimension finie.

I: formes isotropes, isométries et somme orthogonale.

On note $q \cong q'$ si q et q' sont isométriques.

1) Montrer que $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{Q}(\mathbb{K})$.

2) On dit qu'une forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{K})$ est *isotrope* si il existe $x \neq 0$ tel que $q(x) = 0$ et que q est *anisotrope* dans le cas contraire.

a) Montrer que si $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{K})$, il existe $x \in V$ tel que $q(x) \neq 0$.

b) On note $\mathbb{H}$ la forme quadratique sur $\mathbb{K}^2$ définie par $\mathbb{H}((x_1, x_2)) = x_1x_2$. Montrer que toute forme $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{K})$ isotrope de dimension 2 est isométrique à $\mathbb{H}$ et en déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, on a $\mathbb{H} \cong \langle \lambda, -\lambda \rangle$.

3) Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V est dite orthogonale pour q si $\widetilde{q}(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Montrer que, pour toute forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{K})$, il existe une base orthogonale (on pourra utiliser la question 2)a) et considérer $\{x\}^\perp = \{y \in V \,/\, \widetilde{q}(x, y) = 0\}$). En déduire qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$ tels que $q \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

4) On suppose $q(x) \neq 0$. Montrer que l'application $y \mapsto s_x(y) = y - 2\frac{\widetilde{q}(x,y)}{q(x)}x$ est une isométrie. En déduire que si $q(v) = q(w) \neq 0$, alors il existe une isométrie u de q sur lui-même telle que $u(v) = w$.

5) Soient (V, q), (V', q') deux formes quadratiques dans $\mathcal{Q}(\mathbb{K})$. On définit une forme quadratique $q \perp q' : V \times V' \to \mathbb{K}$ par la formule $q \perp q'((x, x')) = q(x) + q'(x')$ pour tous $x \in V, x' \in V'$.

a) Montrer que $q \perp q'$ est dans $\mathcal{Q}(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{Q}(\mathbb{K})$ vérifient $q_1 \perp q_3 \cong q_2 \perp q_3$, alors $q_1 \cong q_2$ (on pourra raisonner par récurence et utiliser la question 4)).

II: Formes de Pfister et facteur de similitude.

On note $im(q) = \{a \in \mathbb{K} - \{0\} \,/\, \exists x \in V\; q(x) = a\}$ et $Sim(q) = \{a \in \mathbb{K} - \{0\} \,/\, aq \cong q\}$.

1) Montrer que $Sim(q)$ est un sous-groupe de $\mathbb{K} - \{0\}$ contenant les carrés de $\mathbb{K} - \{0\}$.

2) Montrer que pour toute forme quadratique q, il existe un unique entier m et une forme quadratique anisotrope q_{an}, unique à isométrie près, tels que $q \cong q_{an} \perp m\mathbb{H}$ où $m\mathbb{H} = \mathbb{H} \perp \cdots \perp \mathbb{H}$ (on pourra utiliser la partie I).

3) Montrer que si q est isotrope, $im(q) = \mathbb{K} - \{0\}$.

Pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$ et toute forme quadratique (V, q), on note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \otimes q$ la forme quadratique $a_1q \perp \cdots \perp a_nq$ sur V^n. On appelle forme de Pfister toute forme quadratique de la forme

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle := \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$$

4) Montrer que pour tout $a, b, \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ on a $\langle\langle a, b \rangle\rangle \cong \langle\langle -ab, a + b \rangle\rangle$ et $\langle\langle a, b \rangle\rangle \cong \langle\langle a, (\lambda^2 - a)b \rangle\rangle$.

5) Soit $p = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ une forme de Pfister.

a) Montrer que $1 \in im(p)$ et en déduire qu'il existe une forme quadratique ϕ unique à isométrie près telle que $p = \langle 1 \rangle \perp -\phi$.

b) Soit $b_1 \in im(\phi)$ quelconque. Montrer qu'il existe $b_2, \dots, b_n \in \mathbb{K} - \{0\}$ tels que $p = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, \dots, b_n \rangle\rangle$.

c) Soit $x \in V$ tel que $p(x) \neq 0$. Montrer que $p \cong p(x)p$ et en déduire que $Sim(p) = im(p)$.

III: Application au niveau d'un corps.

Le *niveau* d'un corps $\mathbb{K}$ est le plus petit entier $n(\mathbb{K})$ tel que -1 soit une somme de $n(\mathbb{K})$ carrés dans $\mathbb{K}$. Si un tel entier n'existe pas, on pose $n(\mathbb{K}) = +\infty$.

1) Déterminer le niveau du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, du corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p un entier premier impair.

2) Montrer que si $n(\mathbb{K})$ est fini, alors $n(\mathbb{K})$ est une puissance de 2. (Indication: on pourra introduire une forme de Pfister adéquate et utiliser la partie II).