**Sélection internationale** Session 2011
**École Normale Supérieure** Paris
Épreuve de culture scientifique - **Informatique** Durée : 4 heures

Pour les candidats ayant choisi **l'informatique** comme **spécialité secondaire**

Si vous ne parvenez pas à répondre à une question, vous pouvez cependant l'utiliser comme hypothèse pour les questions suivantes.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

**Exercice 1.**

1. Un ensemble $E$ muni d'un ordre $\leqslant$ est dit *bien foundé* si et seulement si il n'y a pas de suite strictement décroissante d'éléments dans $E$ (pour l'ordre $\leqslant$).

   Prouvez que $(E, \leqslant)$ est bien fondé si et seulement si tout sous-ensemble non-vide de $E$ a un élément minimal (un élément *minimal* $m$ d'un sous-ensemble $F$ est tel que si $x \leqslant m$ et $x \in F$, alors $x = m$).

2. Nous étudions maintenant les fonctions récursives, et leur terminaison. Considérons $f$ :

```
f n =
  if n > 100
  then return (n - 10)
  else return f (f (n + 11))
```

   Il n'est pas certain que $f$ termine à cause des appels récursifs à $f$ dans la dernière ligne.

   Considérons une fonction récursive $g$ prenant ses arguments dans un ensemble $A$. Nous supposons qu'il existe une fonction $\varphi : A \mapsto (E, \leqslant)$, telle que $(E, \leqslant)$ est bien fondé. Notons $B$ le sous-ensemble de $A$ tel que pour tout $x \in B$, $\varphi(x)$ est minimal dans $\varphi(A)$. Notons $P_{g,y}$ une propriété de la fonction $g$ et de l'élément $y \in A$.

   Supposons que :

   - $P_{g,y}$ est vrai pour tout $y \in B$, et
   - pour tout $y$ qui apparaît comme argument de la fonction $g$ dans la définition de $g$ appliquée à l'argument $x$ (par exemple, pour $f$, y est soit $(n + 11)$, soit $f(n + 11)$), $\varphi(y) < \varphi(x)$, et
   - si pour tout $y$ qui apparaît comme argument de la fonction $g$ dans la définition de $g$ appliquée à l'argument $x$ (de même, pour $f$, $y$ est soit $(n+11)$, soit $f(n+11)$), $P_{g,y}$ est vrai, alors $P_{g,x}$ est également vrai.

   Alors prouvez que pour tout $x$, $P_{g,x}$ est vrai.

3. Est-ce que $f$ (définie plus haut) termine? Prouvez le formellement en utilisant le résultat des questions précédentes. On pourra prendre $B = ]100; +\infty[$.

4. Définissons maintenant récursivement la fonction d'Ackermann prenant deux arguments :

```
h n p =
  if n = 0
  then return (p + 1)
  else
    if p = 0
    then return h (n - 1) 1
    else return h (n - 1) (h n (p - 1))
```

Prouvez que cette fonction termine sur tous les couples d'entiers positifs $(n, p)$.