Exercice 1

Partie 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$. On pose

$$c_k(f) \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$S_n(f)(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)e^{ikx}, \quad T_n(f)(x) \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x), \quad n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(f)(x) \;:=\; \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)dt$, *resp.* $T_n(f)(x) \;:=\; \int_0^{2\pi} f(t)F_n(x-t)dt$, où les fonctions D_n et F_n sont définies par

$$D_n(x) \;:=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}, \quad \textit{resp. } F_n(x) \;=\; \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} e^{ijx}.$$

2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt = +\infty$.

3) Montrer que $F_n \geq 0$, $\int_0^{2\pi} F_n(t)dt = 1$, et pour tout $\delta \in]0, 2\pi[$,

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} F_n(t)\,dt \;\to 0 \quad \text{lorsque } \; n \to +\infty.$$

4) En déduire les assertions suivantes:

a) Si f est continue en x, la suite $(T_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

b) Si f est continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

c) Si $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ sauf éventuellement en ses points de discontinuité.

5) On suppose dans cette question que f est continue, et que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction g sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g = f$.

6) On suppose dans cette question que f est de classe C^∞. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$c_k(f) \;=\; O(|k|^{-N}) \quad \text{lorsque } \; |k| \to +\infty.$$

7) On suppose dans cette question que f est C^∞ (toujours 2π-périodique). On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité

$$R_n(f) \;:=\; \frac{2\pi}{n}\sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\left|R_n(f) \;-\; \int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right| \;=\; O(|n|^{-N}) \quad \text{lorsque } \; |n| \to +\infty.$$

Partie 2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $D(z,R) := \{z' \in \mathbb{C}, |z'-z| < R\}$. Une fonction $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, Ω ouvert de $\mathbb{C}$, est dite *analytique sur* Ω si: pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite $(a_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $R_0 > 0$ tels que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{0,n}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0,R_0), \quad D(z_0,R_0) \subset \Omega.$$

On rappelle qu'une série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est analytique sur son disque de convergence. On admet également le résultat suivant, dit *principe des zéros isolés: Si* $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, Ω *ouvert de* $\mathbb{C}$, *est analytique sur* Ω, *alors soit* F *est nulle dans* Ω, *soit l'ensemble des zéros de* F $\{z \in \Omega,\, F(z) = 0\}$ *n'admet pas de point d'accumulation dans* Ω.

1) Soit $R > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est R-analytique si: pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{0,n}\,(x-x_0)^n, \quad \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[.$

a) En utilisant le principe des zéros isolés, montrer que si f est R-analytique, la formule

$$F(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_{0,n}\,(z-x_0)^n, \quad z \in D(x_0,R),\; x_0 \in \mathbb{R}$$

définit un prolongement de f à l'ensemble $H_R \;:=\; \{z = x+iy,\; |y| < R\}$.

b) Montrer que si f est 2π- périodique, F vérifie $F(z+2\pi) = F(z)$ pour tout $z \in H_R$.

2) On appelle *chemin fermé* l'image Γ d'une application $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$, continue et C^1 par morceaux, vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1)$. Pour toute fonction F continue en tout point de Γ, on appelle *intégrale de* F *le long de* Γ la quantité

$$\int_\Gamma F \;:=\; \int_0^1 F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Montrer que pour une série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, et pour tout chemin fermé $\Gamma \subset D(0,R)$, on a $\int_\Gamma F = 0$.

3) On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est à la fois 2π-périodique, et $R-$analytique pour un $R > \pi$. En utilisant la question 1)b) et la question 2) de la partie 2, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$c_k(f) = O(e^{-\delta|k|}), \quad \text{lorsque } |k| \to +\infty$$

4) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On suppose réciproquement qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$c_k(f) = O(e^{-\delta|k|}), \quad \text{lorsque } |k| \to +\infty$$

Montrer que f est R-analytique pour un $R > 0$.

Exercice 2 : Autour de l'exponentielle de matrice

Soit $n \geq 1$ un entier. On munit $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) de la norme euclidienne (respectivement hermitienne) usuelle. Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit $M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carées de taille n sur $\mathbb{K}$ muni de la topologie induite et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{K})$. On écrira Id pour la matrice identité de $GL_n(\mathbb{K})$.

On notera $\det(M)$ le déterminant d'une matrice M, ${}^tM$ sa transposée et $[M,N] := MN - NM$ le commutateur de deux matrices M, N. Enfin on appellera matrice exponentielle de M, notée $\exp(M)$, la matrice suivante:

$$\exp(M) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!}.$$

I) Préliminaires:

1. Montrer que $\exp(M)$ est bien définie pour toute matrice M (c'est à dire que la série est convergente) puis que l'application $M \mapsto \exp(M)$ est une application continue $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(M) \in GL_n(\mathbb{K})$.
3. Calculer $\det\big(\exp(M)\big)$ en fonction de la trace $Tr(M)$ de M.
4. Montrer que, pour toutes matrices M, N, on a
$$\exp\big(tM\big)\exp(tN) = \exp\Big(t(M+N) + \frac{t^2}{2}[M,N] + O(t^3)\Big)$$
où $t \in \mathbb{R}_+$ tend vers 0.
5. En déduire que
$$\lim_{k\to+\infty}\left(\exp\Big(\frac{M}{k}\Big)\exp\Big(\frac{N}{k}\Big)\exp\Big(\frac{-M}{k}\Big)\exp\Big(\frac{-N}{k}\Big)\right)^{k^2} = \exp\Big([M,N]\Big).$$
6. Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble
$$L_G := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tM) \in G\}$$
est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

II) Décompositions de matrices unitaires Soit $U \in U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \,/\, {}^t\overline{M}M = Id\}$ une matrice unitaire. Ici on note $\overline{M}$ la matrice obtenue en prenant les conjugués des coefficients de $M \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de U.
2. Soit $A \in U_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice unitaire Q et une matrice diagonale réelle Δ, dont les coefficients appartiennent à l'intervalle $[0,1[$, telles que $A = Q^{-1}\exp(2i\pi\Delta)Q$.
   (b) On suppose que A est à la fois unitaire et symétrique. Montrer que la matrice $X = Q^{-1}\Delta Q$ est symétrique réelle, et que $A = \exp(2i\pi X)$.
3. Soit $U \in U_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire.

(a) Montrer que la matrice ${}^tUU$ est symétrique et unitaire.

(b) Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle X et une matrice orthogonale réelle $P \in O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tMM = Id\}$ telles que $U = P\exp(i\pi X)$.

(c) Une telle décomposition est-elle unique ?

III) Sous-groupes commutatifs de $GL_n(\mathbb{R})$ Soit G un sous-groupe fermé, connexe et *commutatif* de $GL_n(\mathbb{R})$. On note encore L_G l'espace vectoriel défini dans la question **I.6)**.

1. Montrer que l'application exponentielle $M \mapsto \exp(M)$ est un homomorphisme de groupes de L_G (muni de la loi d'addition) vers G.
2. En déduire que $\exp(L_G) = G$.
3. Montrer que $\Gamma_G = \{X \in L_G \,/\, \exp(X) = Id\}$ est un sous-groupe discret de L_G, c'est à dire un sous-groupe de L_G tel que pour tout $x \in \Gamma_G$, le singleton $\{x\}$ est ouvert dans Γ_G (muni de la topologie induite).
4. Montrer qu'il existe deux entiers $s, t \geq 0$ tels G est isomorphe au groupe $\mathbb{R}^s \times (S^1)^t$, où S^1 désigne le sous-groupe de $\mathbb{C} - \{0\}$ des nombres complexes de module 1.

IV) Application au Théorème de d'Alembert-Gauss On considère ici le corps $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension 2). On note G le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$. Pour tout élément z de G, on note $\rho(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application qui, à tout élément z' de $\mathbb{C}$, attache $\rho(z)(z') := zz' \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que $\rho(z)$ appartient à $GL_2(\mathbb{R})$, et montrer que l'image $\rho(G)$ de G est un sous-groupe fermé de $GL_2(\mathbb{R})$, isomorphe à G.
2. Soit maintenant $\mathbb{L}$ un corps commutatif contenant $\mathbb{R}$, et dont la dimension en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel soit un entier $d \geq 2$. Montrer que le groupe $G = \mathbb{L}^*$ s'identifie à un sous-groupe commutatif connexe fermé de $GL_d(\mathbb{R})$.
3. On admettra que pour $d \geq 3$ et $t \geq 1$, l'espace topologique $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^s \times (S^1)^t$ (le premier est simplement connexe, l'autre pas). Montrer que $d = 2$, et en particulier, que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. (On pourra utiliser la question **III.4**).