EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
GEOSCIENCES

Exercice 1- Rayon de la Terre

En 276-194 av. J.-C., Eratosthène estima la longueur du rayon terrestre à partir d'observations dans les villes de Syène et Alexandrie en Egypte (Figure 1), à l'heure de midi, le jour du solstice d'été.

Il observa que le soleil ne formait aucune ombre au fond d'un puits à Syène (rayons du soleil à la verticale) tandis qu'une obélisque à Alexandrie formait une ombre (voir figure 1). Eratosthène supposa d'une part que Syène et Alexandrie appartiennent au même méridien et d'autre part que le soleil est suffisamment éloigné pour que les rayons solaires atteignant Syène et Alexandrie soient parallèles.

A l'aide de la longueur de l'ombre formée par l'obélisque, il estima que l'inclinaison α des rayons solaires avec la verticale à Alexandrie est égale à $1/50$ e de tour.

Question A partir de l'expérience d'Eratosthène, déduire la rayon de la Terre. Discuter ce résultat

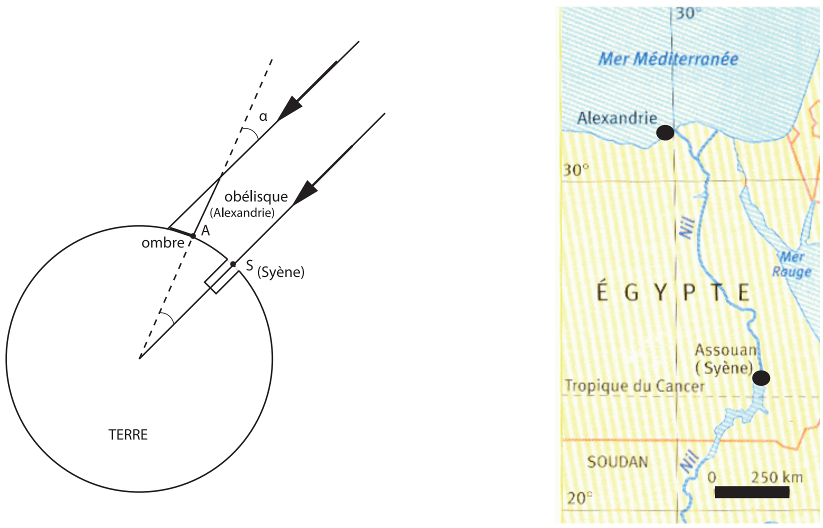


FIGURE 1 – Estimation de la longueur du rayon terrestre à partir d'observations à Syène et Alexandrie

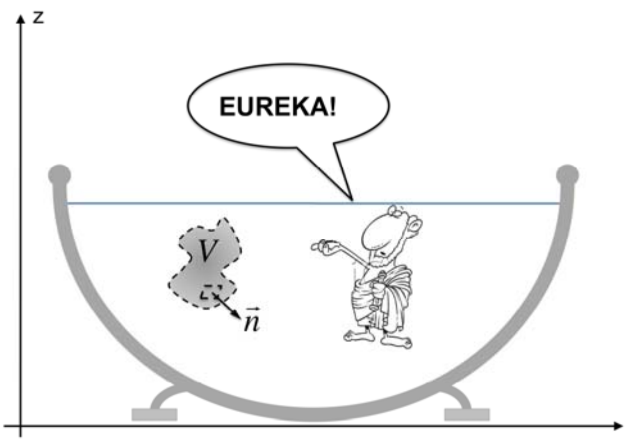
Exercice 2 : Archimède dans sa baignoire

Dans cet exercice nous allons discuter le principe d'Archimède sur la flottabilité des corps dans un fluide. Nous considérons une baignoire remplie d'eau (voir la figure ci-dessous) ; pour tout volume d'eau, *V,* on peut écrire l'équation suivante :

$$-\int_S p\vec{n}\ \ ds - \vec{k}\int_V g\rho\ \ dv\ =\ 0,$$

où S est la surface extérieure du volume V ; p est la pression ; g la constante d'accélération de gravité ; ρ est la densité de l'eau ; $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface *ds* (voir figure), et $\vec{k}$ le vecteur unitaire dirigé vers le haut le long de l'axe *z*.

La première intégrale représente la somme de toutes les forces de pression agissant sur le volume d'eau, la deuxième représente la somme de toutes les forces de gravité. Le volume *V* est l'équilibre (l'eau ne bouge pas) et donc la somme des forces est égal à zéro.



Question 1) Supposons qu'Archimède rentre dans la baignoire et il est entièrement submergé. Montrer que la force qui agit sur son corps est donnée par :

$$\vec{F} = \vec{k}\ \ g\ (M_w - M_A),$$

où $M_A = \int_{V_A} \rho_A\ \ dv = \rho_A V_A$ définit la masse d'Archimède, dans l'hypothèse où la constante ρ_A est la densité moyenne d'Archimède, et M_w est la masse d'un volume d'eau V_A égale au volume d'Archimède.

2. Nous supposerons que l'eau dans la baignoire est à l'équilibre hydrostatique, donc :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Question 2.1) Calculer la pression dans la baignoire à une profondeur de 3 mètres, en supposant que la pression atmosphérique est $p_a = 10^5 \ \ Pa$.

Question 2.2) À quelle profondeur dans l'eau la pression est égale à deux fois la pression atmosphérique?

3. Maintenant, nous supposons que le corps d'Archimède est compressible sous l'action de la pression de l'eau. Son volume peut être décomposé en une partie incompressible, V_u, et une partie compressible, plus petite, V_c, (représentant ses poumons) soit : $V_A = V_u + V_c$.

La partie compressible est donnée par : $V_c = 0.008\left[1 - \varepsilon(p - p_a)\right] \quad m^3$
où ε est un coefficient de compressibilité. On prendra les valeurs suivantes :

$M_A = 85 \ \ kg$
$V_u = 0.08 \ \ m^3$
$\varepsilon = 1.4 \ \ 10^{-5} \ \ Pa^{-1}$

Question 3) Montrer qu'à la profondeur de 3 mètres, Archimède coule.

Exercice 3 : Température et flux de chaleur

Lors d'un forage profond de $250\,m$, on constate que le gradient de température est constant. On mesure les températures suivantes : en $z_1 = 50\,m$, $T(z_1) = 11^oC$ et en $z_2 = 250\,m, T(z_2) = 16^oC$. La valeur moyenne de la conductivité thermique λ, supposée constante, est $\lambda = 3.0\,W\,m^{-1}\,{}^oC^{-1}$. On suppose dans cette exercice que les propriétés physiques ne varient que verticalement (en z).

Question 1 : Calculer la valeur du gradient géothermique. Deduire la température T_o et le flux de chaleur q_o à la surface (en $z = 0$). Comment est orienté q_o ? On rappelle que la Loi de Fourier s'écrit : $q = -\lambda \frac{dT}{dz}$, où q s'exprime en Watt par unité de surface ($W\,m^{-2}$).

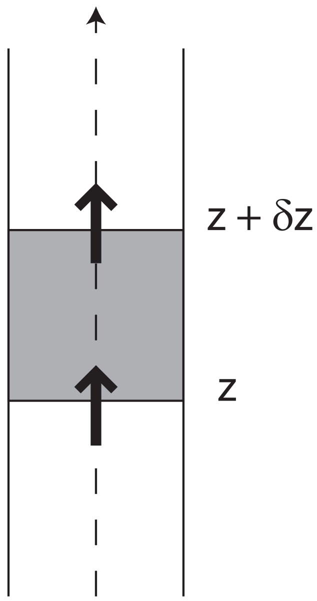


FIGURE 2 – Bilan de flux de chaleur

On isole un petit volume de roche (figure ci dessus) de hauteur infinitésimale δz et de surface S.

Question 2 : Ecrire le flux de chaleur entrant au travers de la surface S à la cote z, noté $q(z)$, puis le flux de chaleur sortant de la surface S en $z + \delta z$, noté $q(z + \delta z)$. En déduire que l'équation de la chaleur s'écrit dans le régime permament :

$$\lambda \frac{d^2\,T(z)}{dz^2} = 0, \tag{1}$$

Question 3 : Résoudre l'équation de la chaleur dans ce cas (on pourra utiliser les conditions aux limites de température T_o et de flux q_o connues en $z = 0$) et dessiner $T(z)$.

Le modèle peut être amélioré en prenant en compte, un terme source P constant, qui décrit par exemple l'énergie produite par des éléments radioactifs contenus dans le granite. Dans ce cas, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\lambda \frac{d^2\,T(z)}{dz^2} + P = 0, \tag{2}$$

Question 4 : Quelle est l'unité de P. Résoudre l'équation de la chaleur dans ce cas (on pourra utiliser les conditions aux limites de température T_o et de flux q_o connues en $z = 0$) et dessiner $T(z)$.

Question 5 Calculer la température prédite par ce modèle à la base de la croûte (z=40 km) ? Quel est le flux de chaleur à cette profondeur ? On prendra $P = 4.8\,10^{-6}\,SI$