

# Banque MP Inter-ENS - Session 2017

## Rapport sur l'épreuve de TIPE de mathématiques.

Ecoles concernées : ENS (Paris) - ENS de Lyon - ENS de Paris-Saclay - ENS de Rennes

Coefficients (en pourcentage du total d'admission):

Concours MP :

- ENS de Paris-Saclay : 3.8%
- ENS de Lyon : 5.4%
- ENS (Paris) : 7.4%
- ENS de Rennes : 3.8%

Concours Info :

- ENS de Paris-Saclay : 7.9%
- ENS de Lyon : 6.3%
- ENS (Paris) : 3.3%
- ENS de Rennes : 11.4%

**Membres du Jury:** B. Deroin, V. Vargas, J.-M. Mirebeau, H. Zaag

### Déroulement de l'épreuve

L'épreuve de TIPE est commune aux quatre ENS. Le candidat dépose, lors de son inscription au concours, un rapport sous la forme d'un unique fichier pdf présentant son travail, et précise quelle en est la discipline dominante (mathématiques, informatique, physique). Le rapport, de deux à cinq pages auxquelles s'ajoutent une bibliographie et d'éventuelles figures, décrit la problématique que le candidat a choisi d'étudier, les outils qu'il a utilisés et les réponses qu'il a apportées ; ce rapport doit naturellement être l'oeuvre du candidat et non la reproduction d'un ouvrage. Cependant, ce rapport n'est pas évalué en tant que tel : il constitue le support sur lequel s'appuiera l'épreuve orale. Il n'a pas pour vocation d'être encyclopédique ni de décrire toutes les connaissances de son auteur dans un domaine donné : il est donc inutile, même nuisible, de présenter des textes très longs que les examinateurs ne pourront pas étudier correctement, ou d'y adjoindre des annexes pléthoriques. À plus forte raison les pièces supplémentaires présentées le jour de l'épreuve ne seront pas prises en considération.

L'oral proprement dit dure 40 minutes. Le candidat est tout d'abord invité à présenter son travail, en abordant rapidement le contenu mathématique. Le choix est laissé au candidat de présenter son travail sur transparents ou au tableau (un tableau et un rétroprojecteur sont à sa disposition dans la salle d'interrogation). Le candidat peut s'appuyer sur son rapport que le jury a sous les yeux lors de l'épreuve. *Cet exposé d'introduction sert à entrer dans le vif du sujet, le jury l'interrompt rapidement pour vérifier la compréhension des concepts utilisés en posant des questions plus précises ou en proposant des exercices courts en rapport avec le sujet traité.*

Le candidat ne doit pas s'inquiéter de n'avoir eu le temps de présenter, à la fin de l'épreuve, qu'une petite partie du plan prévu, ni du fait que le jury ait concentré ses questions sur un point particulier. On ne doit pas non plus être gêné par le fait que les examinateurs posent beaucoup d'exercices ou que leur rapport avec le sujet ne soit pas immédiatement évident (il peut ne se dégager que progressivement).

### **Critères d'évaluation**

*L'épreuve de TIPE de mathématiques est, avant tout, une épreuve de mathématiques. Le premier critère d'évaluation est donc la bonne maîtrise du contenu mathématique de l'étude et bien entendu de celle du programme de MP.*

Bien que comportant une partie écrite (le rapport) qui se doit d'avoir un contenu mathématique sérieux, le TIPE de mathématiques est une épreuve orale et c'est donc principalement la discussion entre le candidat et le jury qui est prise en compte dans la note finale.

Les sujets pluridisciplinaires sont les bienvenus, tout comme les considérations d'ordre empirique et expérimental, ou les implémentations informatiques, mais le candidat doit être à même de les relier à une analyse mathématique. Le jury souhaite trouver, notamment, des énoncés mathématiques précis sur lesquels il pourra asseoir ses questions. Le soin apporté à d'autres éléments du rapport ne peut en aucun cas remédier à l'insuffisance de contenu mathématique que nous avons constatée dans certains travaux. En particulier, nous attirons l'attention du candidat sur l'importance du choix de la discipline dans laquelle il présentera son TIPE (mathématiques, informatique ou physique) et qui conditionne le jury qui l'écouterà : un TIPE centré sur la programmation informatique d'un algorithme de résolution (type Rubik's cube) aurait peut-être été plus avantageusement présenté en informatique. Les jurys ne sont pas mixtes et *le jury de mathématiques n'a pas vocation à tester les programmes informatiques.*

### **Compétences attendues**

L'épreuve de TIPE a la particularité de permettre au candidat de choisir le thème sur lequel il sera interrogé. En contrepartie, le jury attend de sa part une bonne compréhension de ce sujet et des outils mathématiques employés pour le traiter. Il va de soi qu'on ne suppose du candidat a priori aucune connaissance au-delà du programme des classes préparatoires, et nous lui conseillons de rester autant que possible dans ce cadre, ne s'en écartant que si cela est nécessaire au sujet choisi. Nous pensons de façon générale qu'il est possible de trouver des thèmes riches et originaux sans s'éloigner beaucoup du programme. En revanche, la maîtrise des concepts avec lesquels on prétend avoir travaillé est indispensable. Les candidats présentant un sujet de probabilités doivent savoir présenter rigoureusement le formalisme au programme (univers, évènement, variable aléatoire) sur un exemple de base, comme le lancer de deux dés.

La composante "initiative personnelle" en mathématique est peut-être plus difficile à cerner qu'en informatique ou en physique. Certains candidats se sentent ainsi obligés de délivrer un programme informatique en annexe que le jury n'a pas vocation à tester. *L'initiative personnelle doit correspondre à un questionnement du candidat tout au long de la préparation de son TIPE en mathématiques* : pour chaque résultat introduit on doit être capable de fournir un exemple ou un contre-exemple, vérifier son application dans un cas simple, justifier de la nécessité de toutes les hypothèses, évaluer la "force" du résultat...

S'agissant d'un théorème, le candidat doit être capable, si on le lui demande, de faire la démonstration si celle-ci est simple ou d'exposer les idées-clés sans entrer dans les détails, et d'indiquer en quoi les hypothèses sont nécessaires. Il n'est bien sûr pas défendu d'admettre une démonstration, mais celle-ci doit être indiquée comme telle dans le rapport, et l'on veillera néanmoins à donner un énoncé précis du résultat en question. Nous mettons spécialement en garde les candidats contre la tentation d'aborder des sujets très ambitieux et par conséquent mal

maîtrisés, ou encore de choisir un domaine mathématique vaste (comme la topologie algébrique ou l'analyse complexe), et de présenter un rapport qui n'est qu'une compilation de théorèmes sans initiative personnelle et sur laquelle on n'aura aucun recul. Le candidat a la possibilité d'apporter des notes personnelles, et de les consulter à sa guise en cas de doute sur une formule ou un énoncé, mais il doit également savoir s'en détacher dans le cadre du dialogue avec le jury.

### **Thèmes choisis**

Le thème de l'année était "Optimalité : choix, contraintes, hasard". *Le jury de mathématique est conscient de la difficulté de suivre le thème imposé chaque année et n'accorde que peu d'importance au lien avec le TIPE du candidat.* À titre d'exemple, voici quelques-uns des thèmes les plus fréquents dans lesquels s'inscrivent les sujets que nous avons rencontrés cette année :

- Etudes d'équations différentielles : équations de Lotka-Volterra, système SI/SIS/SIR..., stabilité, théorème de Poincaré-Bendixson.
- Arithmétique : corps finis, cryptographie, codes correcteurs d'erreurs.
- Théorie de Galois, courbes elliptiques, constructions à la règle et au compas.
- Théorie des graphes : théorème des 5 couleurs, problème de Dirichlet, théorème max-flow min-cut.
- Probabilités : rotor-routeur, percolation, processus de Galton–Watson, mouvement brownien, algorithme Page-Rank, files d'attente.
- Algèbre linéaire : invariants de similitudes, décomposition de Frobenius, algorithmes de décompositions matricielles.
- Equations aux dérivées partielles : équation de Burger, équation de la chaleur.
- Théorie des groupes : actions de groupes, représentations des groupes.
- Géométrie : invariant de Dehn, géométrie projective, groupes de transformations (paradoxe de Banach Tarski).
- Systèmes dynamiques : suites définies par récurrence, fonction logistique, fractales, ergodicité, chaos, conjugaison topologique, etc.
- Logique mathématique: indépendance de l'axiome du choix, hypothèse du continu, théorème de transfert.
- Topologie algébrique : groupe fondamental, théorème de Brouwer, théorie des noeuds.
- Pavages : dominos, algorithme de Thurston.
- Théorie des jeux: jeu de Nim, théorème de Sprague-Grundy

Quelques rares candidats ont préparé leur TIPE en ne s'appuyant sur aucune littérature existante, cherchant à résoudre par eux-mêmes un problème de leur choix. Précisons que ce type d'étude n'est pas inintéressant a priori mais demande un lourd investissement, un bon encadrement, et que le problème soit bien choisi.

### **Remarques sur la forme**

Le jury a été, dans l'ensemble, plutôt satisfait des différents rapports. C'est le signe que l'épreuve est prise au sérieux et travaillée pendant la période (pourtant chargée) de la prépa. Il est appréciable de voir une véritable bibliographie figurer en fin du rapport. Il semble pourtant nécessaire de préciser que, même s'il ne s'agit pas d'une épreuve de français, le rapport contient du texte et nous ne pouvons que conseiller aux candidats de se relire attentivement avant de rendre leur rapport. Certains candidats ont présenté un travail commun sur un sujet. C'est tout à fait possible et même bénéfique pour le travail au cours de l'année scolaire. Le jury apprécie que, dans un tel cas, le candidat le mentionne. Il sera dans tous les cas évalué sur sa compréhension personnelle du sujet présenté. *Nous rappelons qu'il est interdit que des candidats différents présentent le même rapport (ce cas de figure a malheureusement été rencontré à plusieurs reprises cette année).*

En cas d'usage de transparents, ceux-ci doivent être lisibles. La simple photocopie du document écrit donne généralement des caractères trop petits. Précisons qu'il ne sert à rien de projeter le texte du rapport, que le jury a sous les yeux. Pour finir, nous tenons à remercier ceux qui, par le recul qu'ils ont pris sur la question qu'ils étudiaient, le niveau de leur travail et la qualité de leur exposé, nous ont donné l'occasion d'avoir un échange d'un réel intérêt scientifique.