ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2021

VENDREDI 16 AVRIL 2021
08h00 - 12h00

FILIERE MP - Epreuve n° 9

MATHEMATIQUES C (ULCR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le thème de ce problème est l'étude des intersections atypiques: étant donnés deux ensembles A et B, une fonction $f : A \to B$ et un sous-ensemble "exceptionnel" C de $A \times B$, le graphe de f ne peut pas rencontrer C en beaucoup de points, sauf si la fonction f est elle-même "exceptionnelle". La première partie, de nature plus algébrique, étudie le cas où la fonction f est donnée par une fraction rationnelle, l'ensemble "exceptionnel" étant soit $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | \, |x| = |y| = 1\}$, soit l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont des racines de l'unité. La deuxième partie, plus analytique et totalement indépendante de la première, étudie le cas d'une fonction "transcendante" f (par exemple $f(x) = e^x$), l'ensemble exceptionnel C étant un réseau du plan.

Notations

Si X est un ensemble fini, on note $|X|$ son cardinal. Si X est un ensemble infini on pose $|X| = \infty$. Par convention ∞ est strictement supérieur à tout nombre réel.

Si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ on note $K[X]_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K, de degré inférieur ou égal à n, et on note $K(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles $F(X) = P(X)/Q(X)$ avec $P, Q \in K[X]$ et $Q \neq 0$. L'inclusion de $K[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ se prolonge en une injection de corps $K(X) \to \mathbb{C}(X)$, et on se permettra dans la suite d'identifier $K(X)$ à un sous-corps de $\mathbb{C}(X)$.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point on note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ et si n est un entier naturel on note $f^{(n)}$ la n-ième dérivée de f.

Si A est un ensemble et si $f : A \to \mathbb{C}$ est une fonction on note

$$Z(f) = \{x \in A \,|\, f(x) = 0\}$$

l'ensemble de ses zéros et

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\} \subset A \times \mathbb{C}$$

son graphe.

Question préliminaire

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $n \geq 2$ un entier. Montrer que si $g \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ vérifie $|Z(g)| \geq n$, alors $|Z(g^{(i)})| \geq n - i$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$.

I Intersections atypiques et fractions rationnelles

Pour $G(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux et $Q \neq 0$, on note $\mathscr{P}(G) = \{x \in \mathbb{C} \,|\, Q(x) = 0\}$ l'ensemble des pôles de G et on note abusivement $G : \mathbb{C} \smallsetminus \mathscr{P}(G) \to \mathbb{C}$ la fonction envoyant x sur $P(x)/Q(x)$.

Fractions rationnelles et rationalité

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(K \setminus \mathscr{P}(F)) \cap K$ soit un ensemble infini. On se propose de montrer que $F \in K(X)$. On écrit $F(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P \in \mathbb{C}[X]_p$ et $Q \in \mathbb{C}[X]_q \smallsetminus \{0\}$ pour certains entiers $p, q \geq 0$. On note $d = p + q + 1$.

2. (a) Soient $x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d \in K$. Montrer que l'application linéaire

$$\varphi : K[X]_p \times K[X]_q \to K^d, \quad \varphi(U, V) := (U(x_i) - y_i V(x_i))_{1 \leq i \leq d}$$

n'est pas injective.

(b) Soient $x_1, \ldots, x_d \in K \smallsetminus \mathscr{P}(F)$ deux à deux distincts tels que

$$F(x_1), \ldots, F(x_d) \in K.$$

Montrer qu'il existe $U \in K[X]_p$ et $V \in K[X]_q$ tels que $(U, V) \neq (0, 0)$ et $P(x_i)V(x_i) = Q(x_i)U(x_i)$ pour $1 \leq i \leq d$. En déduire que $F \in K(X)$.

(c) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(K \setminus \mathscr{P}(F)) \cap K$ soit un ensemble infini. Montrer que $F \in K(X)$.

Intersections avec le cercle unité

Soit $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On dit qu'une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ est *spéciale* si l'ensemble

$$\{z \in \mathbf{U} \smallsetminus \mathscr{P}(F) \mid F(z) \in \mathbf{U}\}$$

est infini. On se propose de décrire les fractions rationnelles spéciales.

Si $z \in \mathbb{C}$ on note $\overline{z}$ son conjugué. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ on note

$$\overline{P}(X) = \sum_{i=0}^{d} \overline{a_i} X^i.$$

Dans les questions 3 à 5 on fixe $F(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \neq 0$. On pose $\overline{F}(X) = \overline{P}(X)/\overline{Q}(X)$ et $G(X) = \overline{F}(1/X)$.

3. (a) Soit $z \in \mathbf{U} \smallsetminus \mathscr{P}(F)$. Montrer que $F(z) \in \mathbf{U}$ si et seulement si $F(z)G(z) = 1$.

(b) En déduire que F est spéciale si et seulement si $G(X) \cdot F(X) = 1$.

4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $B_\alpha(X) = \frac{X - \alpha}{1 - \overline{\alpha} X}$ est spéciale. Que vaut $B_\alpha(X)$ pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha \in \mathbf{U}$?

5. On suppose que F est spéciale.

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \smallsetminus \mathscr{P}(F)$. Montrer que $F(\alpha) = 0$ si et seulement si $1/\overline{\alpha} \in \mathscr{P}(F)$.

(b) Montrer que si $F \in \mathbb{C}[X]$ alors il existe $c \in \mathbf{U}$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $F(X) = cX^d$.

(c) Montrer qu'il existe des entiers d, n avec $n \geq 0$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) = X^d \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}(X).$$

On pourra écrire $F(X) = P(X)/Q(X)$ et raisonner par récurrence sur le nombre de racines de P.

Racines de l'unité

Soit Λ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un entier $n \geq 1$ vérifiant $z^n = 1$, i.e. Λ est l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$. On se propose de décrire les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(\Lambda \smallsetminus \mathscr{P}(F)) \subset \Lambda$.

Pour $n \geq 1$ on pose $\zeta_n = \exp(2i\pi/n) \in \Lambda$ et on note

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) = \{F(\zeta_n) \,|\, F \in \mathbb{Q}(X) \text{ et } \zeta_n \notin \mathscr{P}(F)\}.$$

Ainsi $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

On note φ l'indicatrice d'Euler et on rappelle que $\varphi(1) = 1$ et que si $n = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$ est la factorisation de $n \geq 2$, alors $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i - 1}(p_i - 1)$. On *admet* le résultat suivant:

Théorème 1 (admis)**.** *Pour tout $n \geq 1$ le corps $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $\varphi(n)$.*

On fixe dans les questions 6 à 12 une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(1) = 1$. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j \geq 1}$ tels que pour tout $j \geq 1$ on a $n_j \geq 1$, $\zeta_{n_j} \notin \mathscr{P}(F)$ et $F(\zeta_{n_j}) \in \Lambda$.

6. Montrer que pour tout $j \geq 1$ il existe un unique $q_j \in \mathbb{Q} \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tel que

$$F(\zeta_{n_j}) = \exp(2i\pi q_j).$$

7. Montrer que $\lim_{j \to +\infty} q_j = 0$.

8. (a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(1) = 0$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} nP(\zeta_n)$.
   (b) Calculer $\lim_{j \to +\infty} n_j(F(\zeta_{n_j}) - 1)$ et en déduire que la suite $(n_j q_j)_{j \geq 1}$ converge.

9. On suppose qu'il existe un entier $c \geq 1$ tel que $c n_j q_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \geq 1$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $F(X) = X^d$.

10. En utilisant le résultat établi dans la question 2b, montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $F \in \mathbb{Q}(\zeta_p)(X)$.

11. Soit $N \geq 1$ un entier, $q \in \mathbb{Q}$ et notons $\zeta = \exp(2i\pi q)$. On suppose que $\zeta \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$. On écrit $q = u/v$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et $v \neq 0$. Soit l le PPCM de v et N.

    (a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\zeta_l = \zeta^a \cdot \zeta_N^b$.

    (b) En utilisant le théorème admis, montrer que $\varphi(l) \leq \varphi(N)$, puis que $l \mid 2N$ et que $2Nq \in \mathbb{Z}$.

12. Montrer qu'il existe un entier $c \geq 1$ tel que $cn_j q_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \geq 1$ et qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $F(X) = X^d$.

13. Décrire les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(\Lambda \smallsetminus \mathscr{P}(F)) \subset \Lambda$.

II Intersections atypiques: le cas transcendant

Courbes et fonctions transcendantes

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ sera appelé non trivial si I est non vide et non réduit à un point. Si I est un intervalle non trivial et si $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, on dit:

- que f est *plate* en un point $x \in I$ si $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire si toutes les dérivées successives de f s'annulent en x;
- que f est *transcendante* si pour tout $d \geq 1$ et tous polynômes $P_0, \ldots, P_d \in \mathbb{R}[X]$, non tous nuls, la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^{d} P_i(x) f(x)^i$ n'est plate en aucun point de I.

14. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour tout réel x. On note $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$, obtenant ainsi une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que si f est plate en 0 alors $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

15. Soit $n \geq 1$ un entier, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ des réels et $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) e^{\alpha_i x}$.

    (a) En calculant $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^N e^{ax}}$ pour $N \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$ convenables, montrer que f n'est pas identiquement nulle.

    (b) En déduire que f n'est plate en aucun $x \in \mathbb{R}$. On pourra commencer par traiter le cas $x = 0$.

16. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont non nuls, alors pour tout intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$ la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)\exp(\alpha x)$ est transcendante.

On fixe pour la suite de cette partie un entier $d \geq 1$ et un segment non trivial $I \subset \mathbb{R}$. On note $\ell(I) = \max I - \min I$ la longueur de I. On a donc $\ell(I) > 0$. Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^2$ est appelé *d-courbe* s'il existe des nombres réels $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$, non tous nuls et tels que

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} = 0 \right\}.$$

On se propose de démontrer le résultat suivant:

Théorème 2. *Soient I un segment non trivial et $f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ une fonction transcendante, de graphe $\Gamma(f)$. Il existe $c_1 \geq 1$ tel que $|\Gamma(f) \cap C| \leq c_1$ pour toute d-courbe C.*

On fixe f comme dans l'énoncé du théorème à démontrer et on note $V \subset \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto x^{i-1} f(x)^{j-1}$ pour $1 \leq i,j \leq d$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite de d-courbes $(C_r)_{r \geq 1}$ telles que $|\Gamma(f) \cap C_r| \geq r^2$ pour tout $r \geq 1$.

17. Soit $g \in V$ une fonction non identiquement nulle. Montrer que g n'est plate en aucun $x \in I$.

18. Soit $r \geq 1$ un entier. Montrer qu'il existe $g \in V$ non identiquement nulle telle que $|Z(g)| \geq r^2$. Montrer que pour toute telle fonction g il existe un segment $K \subset I$ de longueur inférieure ou égale à $\ell(I)/r$ tel que $|Z(g) \cap K| \geq r$.

Soient $n = \dim V$, $g_1, \ldots, g_n$ une base de V et

$$S_n = \{(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1\}.$$

Pour $\underline{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in S_n$ posons $G_{\underline{a}} = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$.

19. Montrer qu'il existe une suite $(\underline{a}_r)_{r \geq 1}$ d'éléments de S_n, ainsi qu'une suite $(K_r)_{r \geq 1}$ de segments inclus dans I dont les longueurs tendent vers 0 quand $r \to +\infty$ et tels que $|Z(G_{\underline{a}_r}) \cap K_r| \geq r$ pour tout $r \geq 1$.

20. Montrer que S_n est compact. En déduire qu'il existe $\underline{a} \in S_n$, $x \in I$ et une suite strictement croissante d'entiers $(r_s)_{s \geq 1}$ avec $r_1 \geq 1$ tels que $\lim_{s \to +\infty} \underline{a}_{r_s} = \underline{a}$ et $\lim_{s \to +\infty} \min K_{r_s} = x$.

21. En utilisant la question 1, montrer que $G_{\underline{a}}$ est plate en x et conclure la preuve du théorème 2.

Une inégalité

On fixe un segment non trivial $I \subset \mathbb{R}$, un entier $n \geq 2$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Pour $x_1, \ldots, x_n \in I$ on note

$$A(x_1, \ldots, x_n) = (f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}).$$

On se propose de démontrer le résultat suivant:

Théorème 3. *Il existe $c_2 > 0$ tel que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ deux à deux distincts, on a*

$$|\det A(x_1, \ldots, x_n)| \leq c_2 \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i|.$$

Dans les questions 22 et 23 on fixe $x_1, \ldots, x_n \in I$ deux à deux distincts et on note

$$\beta = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) = (x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1}).$$

22. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

    (a) Montrer que si $f(x_1) = \cdots = f(x_{n-1}) = 0$ alors il existe $y \in I$ tel que $f(x_n) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\beta$. On pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = \beta f(x) - \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i) f(x_n)$.

    (b) En déduire qu'il existe $y \in I$ tel que

    $$f(x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_i - x_j} = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\beta.$$

23. Montrer qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in I^n$ tel que

$$\det A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\beta}{(n-1)!} \cdot \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_{n-1}) & f_1^{(n-1)}(y_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \ldots & f_n(x_{n-1}) & f_n^{(n-1)}(y_n) \end{pmatrix}$$

24. Conclure la preuve du théorème 3.

Intersections atypiques: le cas transcendant

On fixe un segment non trivial $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction transcendante $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, dont on note $\Gamma(f)$ le graphe. Pour un entier $n \geq 1$ on note $\frac{1}{n}\mathbb{Z}^2 = \{(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) |\, x, y \in \mathbb{Z}\}$. On se propose de démontrer le résultat suivant.

Théorème 4. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c_3 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ on a*

$$\left|\Gamma(f) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2\right| \leq c_3 n^\varepsilon.$$

On fixe pour la suite $\varepsilon > 0$ et un entier $d > 1$ tel que $\frac{2}{d+1} < \varepsilon$.

Pour $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on note $v^P \in \mathbb{R}^{d^2}$ le vecteur dont les coordonnées (numérotées de 1 à d^2) sont définies par la formule $v^P_{i+dj+1} = x^i y^j$ pour $0 \leq i, j < d$. Par exemple, si $d = 2$ on a $v^P = (1, x, y, yx)$ et pour $d = 3$ on a $v^P = (1, x, x^2, y, yx, yx^2, y^2, y^2x, y^2x^2)$.

Si $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ on note $B(P_1, \ldots, P_n)$ la matrice de taille $d^2 \times n$ dont les vecteurs colonnes sont $v^{P_1}, \ldots, v^{P_n}$.

25. Soient $n \geq 1$ un entier et $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une d-courbe contenant $P_1, \ldots, P_n$ si et seulement si
$$\operatorname{rang}(B(P_1, \ldots, P_n)) < d^2.$$

26. En utilisant le théorème 3, montrer qu'il existe un réel $c > 1$ tel que pour tous points $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_{d^2} = (x_{d^2}, y_{d^2})$ deux à deux distincts de $\Gamma(f)$ on a
$$|\det B(P_1, \ldots, P_{d^2})| \leq \left(c \cdot \max_{1 \leq i < j \leq d^2} |x_i - x_j|\right)^{\frac{d^2(d^2-1)}{2}},$$
On fixe un tel réel c pour la suite.

27. Soient $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_{d^2} = (x_{d^2}, y_{d^2})$ des points deux à deux distincts appartenant à $\Gamma(f) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2$.
    (a) Montrer que $n^{d^2(d-1)} \cdot \det B(P_1, \ldots, P_{d^2})$ est un entier.
    (b) En déduire que si $P_1, \ldots, P_{d^2}$ n'appartiennent pas à une même d-courbe, alors
    $$\max_{1 \leq i < j \leq d^2} |x_i - x_j| \geq c^{-1} n^{-\frac{2}{d+1}}.$$

28. Soit J un segment contenu dans I et de longueur strictement inférieure à $c^{-1}n^{-\frac{2}{d+1}}$. Montrer qu'il existe une d-courbe contenant tous les points de $\Gamma(f) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2$ dont l'abscisse appartient à J.

29. Finir la preuve du théorème 4.